Лекция 1. Мера Лебега плоских множеств

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

5 сентября 2012 г.

Введение

Функция Дирихле не интегрируема по Риману:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ 0 & \text{при} \quad x \in \mathbb{J} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Нужно расширить понятие интеграла Римана так, чтобы, в частности, функция Дирихле оказалась интегрируемой.

Элементы теории множеств

$$A \cup B = \{x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x \in A \quad \text{и} \quad x \notin B\},$$

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

ПРИМЕР 1. Пусть $A \subset P$ и $B \subset P$, тогда имеют место следующие равенства:

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)]\,, \tag{1}$$

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B)\,, \tag{2}$$

$$A \vartriangle B = (P \setminus A) \vartriangle (P \setminus B)\,. \tag{3}$$

ПРИМЕР 2. Кроме того, справедливы следующие вложения:

$$(A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)\,; \tag{4}$$

если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)\,. \tag{5}$$



Мера прямоугольников

$$\Pi = \{A_x \times B_y\},$$
$$A_x = \{x \in \lfloor a, b \rceil\}, \quad B_y = \{y \in \lfloor c, d \rceil\}.$$

(Символ $\lfloor a, b \rceil$ обозначает конечный промежуток любого типа.) Причем Π может быть пустым множеством, если, например, $a > b$, точкой, когда $a = b$ и $c = d$, и отрезком (интервалом, полуинтервалом), когда $a = b$ и $c < d$.
Определим меру собственного прямоугольника Π стандартным образом, как площадь:

$$m(\Pi) = (b - a)(d - c).$$

Если же Π — это пустое множество, точка или отрезок (интервал, полуинтервал), то определению считаем, что

$$m(\Pi) = 0.$$



Мера плоских элементарных множеств

Можно доказать, что введенная мера m является аддитивной функцией прямоугольников, т. е. если

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i \text{— прямоугольник},$$

то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i). \tag{6}$$

Теперь мы введем понятие *элементарного множества* из $\mathbb{R}^2$.

Определение 1. *Элементарным множеством из $\mathbb{R}^2$ называется множество, полученное объединением* ***конечного*** *числа* ***попарно непересекающихся*** *прямоугольников.*

При этом мера элементарного множества вводится как

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i), \quad \Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{7}$$

Корректность определения

☐ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j, \tag{8}$$

где

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В силу равенств (8) имеем

$$\Pi_i = \bigcup_{j=1}^{l} \left(Q_j \bigcap \Pi_i \right), \quad Q_j = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\Pi_i \bigcap Q_j \right), \tag{9}$$

причем

$$\begin{aligned} \left(Q_{j_1} \bigcap \Pi_i \right) \bigcap \left(Q_{j_2} \bigcap \Pi_i \right) &= \emptyset \quad \text{при} \quad j_1 \neq j_2, \\ \left(\Pi_{i_1} \bigcap Q_j \right) \bigcap \left(\Pi_{i_2} \bigcap Q_j \right) &= \emptyset \quad \text{при} \quad i_1 \neq i_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Корректность определения

Очевидно, что множество

$$Q_j \bigcap \Pi_i = \Pi_i \bigcap Q_j$$

является прямоугольником. Таким образом, согласно определению (7) в силу (8), (9), (10) и (6) приходим к следующей цепочке равенств:

$$m'(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^{n} m\left(\bigcup_{j=1}^{l}\left(Q_j \bigcap \Pi_i\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} m\left(Q_j \bigcap \Pi_i\right) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} m\left(\Pi_i \bigcap Q_j\right) = \sum_{j=1}^{l} m(Q_j). \tag{11}$$

⊠

Конечная аддитивность и монотонность

Непосредственно из определения следуют важные свойства меры на элементарных множествах. Именно, если A, B — элементарные множества, то

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow m'(A \cup B) = m'(A) + m'(B), \qquad (12)$$

(конечная аддитивность)

$$A \subset B \Rightarrow m'(A) \leqslant m'(B) \qquad (13)$$

(монотонность).

Имеет место свойство *счётной полуаддитивности* элементарных множеств.

Теорема

Пусть A и A_n при $n \in \mathbb{N}$ являются элементарными множествами, причем

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

тогда

$$m'(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n). \tag{14}$$

Доказательство теоремы. 1

Прежде всего заметим, что по элементарному множеству A можно построить такое замкнутое элементарное множество $\overline{A}$, что

$$\overline{A} \subset A$$

и

$$m'(\overline{A}) \geqslant m'(A) - \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (15)$$

□ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{j=1}^{l} \Pi_j, \quad \text{где} \quad \Pi_i \bigcap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Пусть $\overline{\Pi}_j$ — это замкнутый прямоугольник (т. е. имеющий вид $[a, b] \otimes [c, d]$), для которого имеет место вложение

$$\overline{\Pi}_j \subset \Pi_j$$



и мера которого равна

$$m(\overline{\Pi}_j) \geqslant m(\Pi_j) - \frac{\varepsilon}{2l},$$

тогда мы приходим к неравенству (15).



Доказательство теоремы. 3

Теперь заметим, что для всякого элементарного множества A_n найдется такое открытое элементарное множество $\widetilde{A}_n$, что

$$A_n \subset \widetilde{A}_n \quad \text{и} \quad m'(\widetilde{A}_n) \leqslant m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{16}$$

Ясно, что

$$\overline{A} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n. \tag{17}$$

Но $\overline{A}$ — это замкнутое и ограниченное множество из $\mathbb{R}^2$, т. е. компакт. Поэтому из открытого покрытия $\{\widetilde{A}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ множества $\overline{A}$ можно выделить конечное подпокрытие

$$\left\{\widetilde{A}_{n_i}\right\}_{i=1}^{s}, \quad \bigcup_{i=1}^{s} \widetilde{A}_{n_i} \supset \overline{A}.$$

Доказательство теоремы. 4

Используя свойство монотонности меры элементарных множеств, можно доказать, что имеет место неравенство

$$m'(\overline{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\widetilde{A}_{n_i}). \qquad (18)$$

Теперь из неравенств (15), (16) и (18) вытекает цепочка

$$m'(A) \leqslant m'(\overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\widetilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(\widetilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \varepsilon. \qquad (19)$$

Приходим к утверждению теоремы. ☒



Следствие из теоремы

Следствие. *Мера $m^{'}$, заданная на элементарных множествах, является $\sigma-$аддитивной:*

$$m^{'}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^{'}(A_n), \qquad (20)$$

если A, A_n (n=1,2,...) — элементарные множества и

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_{n_1} \bigcap A_{n_2} = \emptyset \quad \textit{при} \quad n_1 \neq n_2.$$

□ Очевидно, нужно доказать лишь неравенство, обратное (14). Используем монотонность внешней меры элементарных множеств

$$\sum_{n=1}^{N} m'(A_n) = m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant m'(A)$$

и предельный переход в неравенстве. ⊠

Определение 2. *Внешней мерой μ^* множества A называется число*

$$\mu^*(A) \equiv \inf_{A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_k} \sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_k), \qquad (21)$$

где $\{\Pi_k\}$ — произвольная счетная система прямоугольников.

Замечание. Пока мы рассматриваем лишь $A \subset \Pi \equiv [0,1] \times [0,1]$, имеем $m(\Pi) = 1$ и из равенства (21) приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \leqslant m(\Pi) = 1,$$

т. е. внешняя мера множества $A \subset \Pi$ всегда конечна.

Следствие. *Из определения внешней меры сразу же ытекает, что*

$$\mu^*(A) = m^{'}(A)$$

для всякого элементарного множества A.

σ-полуаддитивность внешней меры

Теорема

Пусть $A \subset \Pi$, $B \subset \Pi$ *— произвольные множества и*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

тогда

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n). \tag{22}$$

Доказательство теоремы. 1

Заметим, что в силу определения внешней меры μ^* для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая система прямоугольников

$$\{\Pi_{k,n}\}_{k=1}^{+\infty},$$

что

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_{k,n}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{23}$$

Доказательство теоремы. 2

С другой стороны,

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и, стало быть,

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} m\left(\Pi_{k,n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы. ☒

Определение 3. *Множество* A *называется измеримым по Лебегу, если для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое элементарное множество* B, *что имеет место следующее неравенство*:

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon. \tag{24}$$

Замечание. Отметим, что из определения 3 сразу же вытекает измеримость по Лебегу множеств A, имеющих нулевую внешнюю меру.

□ Действительно, пусть $\mu^*(A) = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $B = \emptyset$ и

$$\mu^*(A \triangle B) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$





Свойства меры Лебега

Множество измеримых по Лебегу множеств $\mathfrak{M}$ обладает определенным набором свойств, некоторые из которых мы собрали в следующей лемме, доказательство которой мы опустим.

Лемма

Сумма, пересечение, дополнение, разность и симметрическая разность измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми по Лебегу множествами.

(Докажите лемму самостоятельно, пользуясь определениями внешней меры и фактами со слайда «Элементы теории множеств».)

Свойства меры Лебега

Теперь мы в состоянии доказать $\sigma-$аддитивность меры Лебега μ на множестве $\mathfrak{M}$. Сначала докажем её **конечную** аддитивность.

Теорема

Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n,$$

где $A_{n_1} \bigcap A_{n_2} = \emptyset$ *при* $n_1 \neq n_2$, *причем* $A, A_n \in \mathfrak{M}$, *тогда*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$

Доказательство теоремы. 1

Лемма

Для любых множеств A и B имеет место следующее неравенство:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \vartriangle B). \tag{25}$$

□ Действительно, имеют место вложения

$$A \subset B \cup (A \vartriangle B), \quad B \subset A \cup (A \vartriangle B),$$

из которых в силу доказанной полуаддитивности внешней меры μ^* имеют место следующие неравенства:

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \vartriangle B), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \vartriangle B).$$

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \vartriangle B).$$

⊠

Доказательство теоремы. 2

Очевидно, что рассматриваемую теорему достаточно доказать для случая двух измеримых по Лебегу множеств A_1 и A_2. Поскольку $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества B_1 и B_2, что

$$\mu^*(A_1 \bigtriangleup B_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \bigtriangleup B_2) < \varepsilon. \tag{26}$$

Введем следующие обозначения:

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2. \tag{27}$$

Ясно, что как объединение двух измеримых множеств множество A измеримо по Лебегу и, конечно, множество B является элементарным.

Доказательство теоремы. 3

Ранее было доказано вложение

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2), \tag{28}$$

поскольку множества A_1 и A_2 не пересекаются. Заметим, что на элементарных множествах внешняя мера μ^* и мера m' совпадают. Тогда из (26) и (28) вытекает следующее соотношение:

$$m'(B_1 \cap B_2) = \mu^*(B_1 \cap B_2) \leqslant \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) + \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < 2\varepsilon. \tag{29}$$

Наконец, в силу (25) имеют место следующие неравенства:

$$\left| m'(B_1) - \mu^*(A_1) \right| = |\mu^*(B_1) - \mu^*(A_1)| \leqslant \mu^*(A_1 \vartriangle B_1) < \varepsilon, \tag{30}$$

$$\left| m'(B_2) - \mu^*(A_2) \right| = |\mu^*(B_2) - \mu^*(A_2)| \leqslant \mu^*(A_2 \vartriangle B_2) < \varepsilon. \tag{31}$$

Доказательство теоремы. 4

С другой стороны, имеет место равенство

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2), \tag{32}$$

которое будет доказано на следующем слайде.

Доказательство теоремы. 5

☐ Докажем, что

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1 \cap A_2).$$

Действительно, имеют место следующие равенства:

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c), \quad A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2),$$

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c),$$

где объединяемые множества не пересекаются и для удобства мы ввели обозначение

$$A^c = E \backslash A.$$

Отсюда приходим к равенствам

$$\lambda(A_1) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c), \quad \lambda(A_2) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2),$$

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c).$$

☒

Доказательство теоремы. 6

Из (29)–(32) вытекает оценка снизу

$$m'(B) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon. \qquad (33)$$

Теперь мы воспользуемся следующим вложением множеств:

$$A \vartriangle B \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2).$$

Из (25) и (33) вытекает следующая цепочка соотношений:

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(A \vartriangle B) = m'(B) - \mu^*(A \vartriangle B) \geqslant$$
$$\geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon - \mu^*(A \vartriangle B) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon. \qquad (34)$$

Доказательство теоремы. 7

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \qquad (35)$$

Обратное неравенство очевидно (полуаддитивность внешней меры), и поэтому приходим к равенству

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Некоторые результаты

Теорема

Счетное объединение и счетное пересечение измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми множествами.

Докажем измеримость счетного объединения измеримых множеств. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — это семейство измеримых множеств и пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Заметим, что без ограничения общности можно считать множества A_n попарно непересекающимися.

$\square$ Действительно, достаточно рассмотреть следующие множества:

$$A_n^{'} = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Очевидно, что $A_{n_1}^{'} \cap A_{n_2}^{'} = \emptyset$ при $n_1 \neq n_2$ и, кроме того,

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^{'}. \quad \boxtimes.$$

Доказательство теоремы. 2

В силу предыдущей теоремы имеет место цепочка выражений:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n'\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n') \leqslant \mu(A). \tag{36}$$

Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n')$$

сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu(A_n') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{37}$$

С другой стороны, измеримо множество

$$C = \bigcup_{n=1}^{N} A_n'.$$

Доказательство теоремы. 3

Стало быть, для $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество B, что

$$\mu^*(C \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{38}$$

Заметим, что имеет место вложение

$$A \triangle B \subset (C \triangle B) \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} A_n'. \tag{39}$$

Стало быть, из (36)–(39) приходим к неравенству

$$\mu^*(A \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$



Некоторые результаты

Теорема

Пусть $\{A_n\}$ — это счетная система измеримых по Лебегу и попарно непересекающихся множеств, тогда

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n), \quad \text{где } A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n. \tag{40}$$

Доказательство теоремы

Действительно,

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n \subset A,$$

и, значит,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \mu(A) \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leqslant \mu(A).$$

Переходя к пределу при $N \to +\infty$, мы получим, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A).$$

Обратное неравенство непосредственно следует из σ-полуаддитивности внешней меры.



Лекция 2. Абстрактная мера Лебега

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

11 сентября 2012 г.

Введение

На прошлой лекции мы рассмотрели построение меры Лебега плоских множеств. Теперь наша задача обобщить эту процедуру на случай произвольных множеств. При этом существо схемы построения абстрактной меры Лебега почти в точности повторяет схему, рассмотренную на прошлой лекции.

Алгебра множеств

Итак, прежде всего нам нужно ввести класс «элементарных» множеств. С этой целью введем понятия алгебры множеств и $\sigma-$алгебры множеств. Дадим определение.

Определение 1. *Семейство подмножеств $\mathcal{A}$ множества X называется алгеброй множеств, если выполнены следующие свойства*:

(i) $\emptyset, \; X \in \mathcal{A}$;

(ii) *из принадлежности $A, B \in \mathcal{A}$ вытекает, что $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$ принадлежат $\mathcal{A}$*;

В том случае, если выполнено дополнительное свойство

(iii) *для любой последовательности множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ вытекает, что*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

система множеств $\mathcal{A}$ называется $\sigma-$алгеброй.

Примеры $\sigma-$алгебр

Тривиальными примерами $\sigma-$алгебр является, например, семейство множеств $\mathcal{A}$, состоящее из $\emptyset$, X. Другим тривиальным примером является семейство $\mathcal{A}$, состоящее из всех подмножество множества X, который обозначается как 2^X (почему?).

Мера на $\sigma-$алгебре.

Определение 2. *Пара* $(\mathcal{A}, X)$, *где* $\mathcal{A}$ *есть* $\sigma-$*алгебра* $\mathcal{A}$ *подмножеств из множества* X, *называется измеримым пространством.*

Определение 3. *Числовая функция* μ, *определённая на измеримом пространстве, называется аддитивной, если для всякого конечного объединения попарно непересекающихся множеств* $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ *имеет место равенство*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Мера на $\sigma-$алгебре

Определение 4. *Числовая функция μ, определённая на измеримом пространстве, называется счетно–аддитивной, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ такой, что*

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A},$$

имеет место равенство

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

Определение 5. *Счетно–аддитивная неотрицательная числовая функция μ, заданная на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из множества X, называется мерой.*

Обозначения

Пусть $\mathcal{A}$ — это алгебра подмножеств из X, на котором задана мера μ, т. е. неотрицательная счетно–аддитивная числовая функция. Это и есть то самое «элементарное» семейство множеств, на котором задана мера μ. Займемся теперь продолжением меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на некоторую $\sigma-$алгебру $\mathcal{A}_\mu$, содержащую $\mathcal{A}$.

Внешняя мера Лебега

Определение 6. *Внешняя мера $\mu^*(A)$ для каждого подмножества $A \subset X$ определяется следующим образом:*

$$\mu^*(A) \equiv \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \middle| \; A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \;\; A_n \in \mathcal{A} \right\}. \qquad (1)$$

Замечание. Из данного определения сразу следует, что для любых множеств $A \subset B \subset X$ верно неравенство $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$. В самом деле, если $B \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то и $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$. («Монотонность внешней меры».)

Определение 7. *Скажем, что множество* $A \subset X$ *измеримо по Лебегу относительно меры* μ, *если для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое множество* $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, *что имеет место следующее неравенство*:

$$\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Множество всех измеримых по Лебегу подмножеств множества X *обозначается как* $\mathcal{A}_\mu$.

Итак, мы предъявили способ продолжения меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на более широкое семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$, где продолжением меры μ является числовая функция μ^* — внешняя мера. Но для дальнейшего нам необходимо ответить на ряд вопросов. Во–первых, что представляет из себя множество $\mathcal{A}_\mu$? Во–вторых, является ли внешняя мера μ^* мерой на семействе множеств $\mathcal{A}_\mu$? На все эти вопросы отвечает следующая теорема.

Основная теорема

Теорема

Пусть μ *— это конечная* $(\mu(X) < +\infty)$ *и неотрицательная мера на алгебре* $\mathcal{A}$ *подмножеств из множества* X*. Тогда имеют место следующие утверждения*:

(i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, *причем внешняя мера* μ^* *совпадает с мерой* μ *на алгебре* $\mathcal{A}$;

(ii) *семейство множеств* $\mathcal{A}_\mu$ *является* $\sigma-$*алгеброй*, *причем ограничение* μ^* *на* $\mathcal{A}_\mu$ *является мерой*;

(iii) *мера* μ^* *на* $\mathcal{A}_\mu$ *есть единственное неотрицательное продолжение меры* μ *с алгебры* $\mathcal{A}$ *на* $\sigma-$*алгебру* $\mathcal{A}_\mu$.

Доказательство утверждения (i)-1

Ясно, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, поскольку для каждого $A \in \mathcal{A}$ и всякого $\varepsilon > 0$ можно взять $A_\varepsilon = A$ и тогда

$$\mu(A \triangle A_\varepsilon) = 0 < \varepsilon.$$

Докажем теперь, что внешняя мера μ^* совпадает с мерой μ на алгебре $\mathcal{A}$. Действительно, по построению меры μ^* имеет место неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Доказательство утверждения (i)-2

Пусть $A \in \mathcal{A}$. Докажем, что имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A).$$

Действительно, пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ — такая последовательность, что

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

но тогда

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A \cap A_n.$$

Доказательство утверждения (i)-3

Прежде всего, в силу неотрицательности и аддитивности меры μ имеет место неравенство

$$\mu(A \cap A_n) \leqslant \mu(A_n)$$

Оно следует из тождества
$\mu(A_n) = \mu(A_n \setminus (A \cap A_n)) + \mu(A \cap A_n)$, где все входящие в него множества принадлежат $\mathcal{A}$.

Доказательство утверждения (i)-4

Можно доказать, что из счетной аддитивности и положительности меры μ вытекает счетная полуаддитивность. Действительно, если $A = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то множество A можно представить в виде объединения непересекающихся множеств C_n, где

$$C_1 = B_1, \quad C_n = B_n \setminus \cup_{l=2}^{n-1} B_l,$$

при $n \geqslant 2$, а $\mu(C_n) \leqslant \mu(B_n)$, и воспользоваться определением счетной аддитивности. Тогда имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A \cap A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

И, значит, имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A).$$



Доказательство утверждения (ii)

Теперь наша задача доказать утверждение (ii): *семейство множеств* $\mathcal{A}_\mu$ *является* $\sigma-$*алгеброй, причем ограничение* μ^* *на* $\mathcal{A}_\mu$ *является мерой.*

Доказательство утверждения (ii)-1

Сначала докажем, что семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ является алгеброй. Действительно, сначала докажем, что дополнение измеримого множества измеримо. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

но тогда поскольку $X \setminus A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и имеет место равенство множеств

$$(X \setminus A_\varepsilon) \triangle (X \setminus A) = A_\varepsilon \triangle A,$$

то

$$\mu^*((X \setminus A_\varepsilon) \triangle (X \setminus A)) = \mu^*(A_\varepsilon \triangle A) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, $X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$.



Доказательство утверждения (ii)-2

Теперь докажем, что объединение двух измеримых множеств измеримо. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$. Значит, для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

С другой стороны, имеют место вложения

$$(A \cup B) \triangle (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \subset (A \triangle A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon),$$

поэтому в силу монотонности внешней меры μ^* имеют место неравенства:

$$\mu^*((A \cup B) \triangle (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) + \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, поскольку $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}_\mu$.

Доказательство утверждения (ii)-3

Докажем теперь, что $A \cap B \in \mathcal{A}_\mu$. Но это следствие следующего равенства множеств:

$$A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)).$$

Таким образом, $\mathcal{A}_\mu$ — алгебра.

Доказательство утверждения (ii)-4. Доказательство полуаддитивности внешней меры.

При условиях

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

в частности, при

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

и

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) < +\infty$$

верно неравенство

$$\mu^*(A) < \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Доказательство утверждения (ii)-4. Доказательство полуаддитивности внешней меры 1.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда по определению внешней меры для каждого из множеств $A_n \subset X$ найдется система множеств

$$\{B_{nm}^{\varepsilon}\} \subset \mathcal{A}$$

такая, что

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} B_{nm}^{\varepsilon}$$

и

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B_{nm}^{\varepsilon}\right) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Доказательство утверждения (ii)-4. Доказательство полуаддитивности внешней меры 2.

Тогда, поскольку $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} \cup_{m=1}^{+\infty} B_{nm}^{\varepsilon}$, в силу определения внешней меры $\mu^*(A)$ имеем

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B_{nm}^{\varepsilon}\right),$$

где в силу свойств сходящихся рядов с неотрицательными членами порядок суммирования не важен, т. е.

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B_{nm}^{\varepsilon}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Доказательство утверждения (ii)-4. Доказательство полуаддитивности внешней меры 3.

В силу произвольности ε имеем требуемое неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n),$$

т. е. мы доказали счетную полуаддитивность внешней меры.

Доказательство утверждения (ii)-5.

Напомним доказательство следующего неравенства:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B) \tag{3}$$

для всех $A, B \in X$, для которых $\mu^*(A), \mu^*(B) < +\infty$. Действительно, справедливы следующие вложения:

$$A \subset B \cup (A \triangle B), \quad B \subset A \cup (A \triangle B),$$

поэтому в силу полуаддитивности внешней меры[1] имеет место неравенства

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B).$$

Стало быть, пришли к (3).

[1] Эта полуаддитивность, очевидно, является частным случаем только что доказанной счетной полуаддитивности.

Доказательство утверждения (ii)-6. Конечная аддитивность внешней меры.

Приступим теперь к доказательству конечной аддитивности внешней меры на $\mathcal{A}_\mu$. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ и $A \cap B = \emptyset$. Нам нужно доказать, что

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

С этой целью нам достаточно доказать, что имеет место неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Доказательство утверждения (ii)-6. Доказательство конечной аддитивности внешней меры 1.

Заметим, что имеет место следующее вложение:

$$A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \subset (A \cup B) \cup (A \cup B)\triangle(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)),$$

поэтому имеет место неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \mu^*((A \cup B)\triangle(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)), \qquad (4)$$

где A_ε и B_ε удовлетворяют условию

$$\mu^*(A\triangle A_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B\triangle B_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$



Доказательство утверждения (ii)-6. Доказательство конечной аддитивности внешней меры 2.

С другой стороны,

$$\mu^*((A \cup B) \triangle (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) + \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon. \quad (5)$$

Таким образом, из (4) и (5) вытекает оценка снизу

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \varepsilon. \quad (6)$$

Доказательство утверждения (ii)-6. Доказательство конечной аддитивности внешней меры 3.

Теперь заметим, что на алгебре $\mathcal{A}$ меры μ и μ^* совпадают. Поэтому в силу конечной аддитивности меры μ на $\mathcal{A}$ имеет место следующее равенство:

$$\mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon). \quad (7)$$

Заметим, что в силу $A \cap B = \emptyset$ имеет место вложение

$$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \subset (A \triangle A_\varepsilon) \cup (B \triangle B_\varepsilon).$$

И поэтому верна следующая оценка сверху:

$$\mu^*(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \leqslant \mu^*(A \triangle A_\varepsilon) + \mu^*(B \triangle B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$



Доказательство утверждения (ii)-б. Доказательство конечной аддитивности внешней меры 4.

Значит, из (7) приходим к оценке снизу

$$\mu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \geqslant \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{8}$$

Но тогда из (6) приходим к такой оценке снизу:

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon) + \mu^*(B_\varepsilon) - 2\varepsilon. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу неравенства (3) имеют место неравенства

$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \mu^*(A \triangle A_\varepsilon), \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(B \triangle B_\varepsilon).$$



Доказательство утверждения (ii)-6. Доказательство конечной аддитивности внешней меры 5.

Стало быть, отсюда приходим к неравенствам

$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (9) приходим к следующему неравенству:

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) - 3\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего имеем

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{10}$$

для всех $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ при условии $A \cap B = \emptyset$.



Доказательство утверждения (ii)-7.

Теперь наша задача доказать, что счетное объединение измеримых множеств измеримо. С этой целью нам достаточно рассмотреть случай попарно непересекающихся множеств. Действительно, пусть $A_n \in \mathcal{A}_\mu$, тогда вместо счетного объединения

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

можно взять

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n,$$

где

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Доказательство утверждения (ii)-8.

Ясно, что $\{B_n\} \subset \mathcal{A}_\mu$ и попарно не пересекаются, причем имеет место равенство

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

В силу конечной аддитивности функции μ^* на $\mathcal{A}_\mu$ и ее монотонности по включению мы приходим к следующим неравенствам:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \mu^*(X) \leqslant \mu(X) < +\infty$$

в силу конечности меры μ.



Доказательство утверждения (ii)-9.

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k)$ сходится. Следовательно, для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $n \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mu^*(A_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

В силу измеримости конечных объединений измеримых множеств для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*\left(B \triangle \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Доказательство утверждения (ii)-10.

Следовательно, в силу вложения

$$B \triangle \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \subset \left(B \triangle \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \bigcup \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k,$$

конечной аддитивности внешней меры и ее счетной полуаддитивности приходим к неравенству

$$\mu^* \left(B \triangle \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \leqslant \mu^* \left(B \triangle \bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu^*(A_k) \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда вытекает измеримость счетного объединения измеримых множеств. Значит, $\mathcal{A}_\mu$ — это $\sigma-$алгебра.

Доказательство утверждения (ii)-11.

Надо, однако доказать, что действительно

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n),$$

где

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

при оговоренных выше условиях. Но это действительно так, потому что, во-первых,

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n)$$

в силу счетной полуаддитивности внешней меры,



а во-вторых, в силу ее «монотонности» и конечной аддитивности

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n \right) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n),$$

т. е. можно утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n) \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right).$$

Устремляя N к бесконечности, имеем равенство (35).

Утверждение (iii).

Нам надо теперь доказать утверждение (iii): *Мера* μ^* *на* $\mathcal{A}_\mu$ *есть единственное неотрицательное продолжение меры* μ *с алгебры* $\mathcal{A}$ *на* $\sigma-$*алгебру* $\mathcal{A}_\mu$.

Доказательство утверждения (iii)-1.

Теперь докажем, что μ^* является единственным продолжением меры μ с алгебры $\mathcal{A}$ на $\sigma-$алгебру $\mathcal{A}_\mu$. Пусть нет. Тогда существует другая мера ν. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$ и $\varepsilon > 0$ являются фиксированными. Тогда найдется такое множество $B \in \mathcal{A}$, что имеет место неравенство

$$\mu^*(A \triangle B) \leqslant \varepsilon.$$

В свою очередь это означает, что существует такая последовательность множеств $\{C_n\} \subset \mathcal{A}$, что

$$A \triangle B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n,$$

причем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство утверждения (iii)-2.

Имеют место следующие неравенства:

$$|\nu(A) - \nu(B)| \leqslant \nu(A \triangle B) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon,$$

поскольку на алгебре $\mathcal{A}$ меры μ, μ^* и ν совпадают. Справедливы следующие неравенства:

$$|\mu^*(A) - \nu(A)| \leqslant |\mu^*(A) - \mu^*(B)| + |\nu(A) - \nu(B)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Стало быть, меры μ^* и ν совпадают на $\sigma-$алгебре $\mathcal{A}_\mu$.

ТЕОРЕМА ДОКАЗАНА.

Лекция 3. Интеграл Лебега. Пространства Лебега

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

12 сентября 2012 г.

Измеримые функции

Интеграл Лебега, конечно, строится не для всех функций, а только для так называемых измеримых. В дальнейшем для удобства вместо тройки $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu^*)$ мы будем писать просто $(X, \mathcal{A}, \mu)$, понимая под $\mathcal{A}$ уже полученную $\sigma-$алгебру измеримых множеств, а под μ уже продолженную по Лебегу меру. Итак, пусть у нас имеется измеримое пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Дадим определение.

Определение 1. *Функция $f(x) : X \to \mathbb{R}^1$ называется измеримой, если для всякого $c \in \mathbb{R}^1$ множество*

$$\{x \in X : \ f(x) \leqslant c\} \in \mathcal{A}.$$



Свойства измеримых функций

Нетрудно доказать простейшие свойства измеримых функций, а именно, что измеримые функции образуют линейное пространство. Кроме того, композиция $\varphi \circ f$ непрерывной функции $\varphi(y)$, которая, кстати говоря, тоже измерима, и измеримой функции $f(x)$ является тоже измеримой. Произведение измеримых функций измеримо. Частное $f(x)/g(x)$ двух измеримых функций измеримо при естественном условии, что $g(x) \neq 0$.

Простые функции

Для дальнейшего нам необходимо ввести так называемые простые функции. Пусть

$$\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A},$$

а $\chi_{A_i}(x)$ — это характеристическая функция множества A_i, т. е.

$$\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \in A_i; \\ 0, & \text{при} \quad x \notin A_i. \end{cases}$$

Дадим определение.

Определение 2. *Функция*

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}(x), \quad c_i \in \mathbb{R}^1,$$

называется простой.



Представление функции

Очевидно, что простые функции измеримы. Заметим теперь, что всякую функцию

$$f(x) : X \to \mathbb{R}^1$$

можно представить в следующем виде:

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \tag{1}$$

где

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}. \tag{2}$$

Очевидно, что измеримость функции $f(x)$ эквивалентна измеримости каждой из функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$.



Интеграл Лебега для неотрицательных функций

Теперь мы в состоянии дать определение интеграла Лебега. Пусть мера μ является неотрицательной. Сначала определим интеграл Лебега от простой функции следующим образом:

$$\int\limits_X h(x)\,\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i). \qquad (3)$$

Теперь предположим, что измеримая функция $f(x)$ является неотрицательной. Тогда определим интеграл Лебега от этой функции следующим образом

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) =$$

$$= \sup\left\{ \int\limits_X h(x)\mu(dx) \Big| h(x) \geqslant 0 \text{ и } f(x) \geqslant h(x)\ \mu - \text{п. вс.} \right\}. \qquad (4)$$

Общий интеграл Лебега

Здесь мы ввели новое понятие «$\mu-$п.вс.», которое означает, что множество, на котором не выполняется некоторое свойство, имеет нулевую меру. Теперь осталось распространить интеграл Лебега на случай произвольных измеримых функций. Делается это следующим образом:

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) = \int\limits_X f_+(x)\mu(dx) - \int\limits_X f_-(x)\mu(dx).$$

Важное свойство интеграла Лебега

Несложно доказать, что множество интегрируемых по Лебегу функций образует линейное пространство. Заметим, что, в отличие от интеграла Римана, для интегрируемости по Лебегу функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $|f(x)|$, которая, очевидно, измерима в силу измеримости $f(x)$, была интегрируема по Лебегу, причем имеет место следующее неравенство:

$$\left|\int\limits_X f(x)\mu(dx)\right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|\mu(dx).$$

Поточечная и равномерная сходимости

До сих пор в курсе вещественного анализа у нас имелось два вида сходимостей функциональных последовательностей $\{f_n(x)\}$ — поточечная и равномерная. В связи с введением измеримого пространства с мерой, т. е. тройки $(X, \mathcal{A}, \mu)$, можно ввести еще два типа сходимостей — сходимость по мере μ и сходимость $\mu-$почти всюду.

Определение 3. *Функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *называется сходящейся по мере* μ *к функции* $f(x)$, *если для всякого* $c > 0$ *имеет место предельное равенство*

$$\lim_{n \to +\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant c\}\right) = 0.$$

Определение 4. *Функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$ *называется сходящейся* $\mu-$*почти всюду к функции* $f(x)$, *если множество точек из* X, *на которых последовательность* $\{f_n(x)\}$ *не сходится к функции* $f(x)$, *имеет нулевую* $\mu-$*меру.*

Связь различных типов сходимостей

Возникает естественный вопрос о том, как связаны эти четыре типа сходимостей функциональных последовательностей. Имеет место следующая цепочка связей этих понятий:

равномерная сходимость $\subset$ **поточечная сходимость** $\subset$

$\subset$ **сходимость п. вс.** $\subset$ **сходимость по мере** .

Обратная связь сходимостей

Оказывается, что есть в некотором смысле и обратная связь этих понятий. Так оказывается, что у всякой сходящейся по мере функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ существует подпоследовательность $\{f_{n_m}(x)\}$, сходящаяся почти всюду. Кроме того, известная теорема Д. Ф. Егорова утверждает, что у каждой почти всюду сходящейся функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое подмножество $X_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu(X \setminus X_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$$

и $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на X_ε. Отметим, однако, что можно привести пример функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящейся по мере, но не сходящейся почти всюду.

Важные свойства интеграла Лебега. $\sigma-$аддитивность. Первая теорема

Теорема

Если $A = \bigcup_n A_n$ *— конечное или счетное объединение непересекающихся измеримых множеств и функция* $f(x)$ *интегрируема по множеству* A*, то верно равенство*

$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\,d\mu,$$

причем из существования интеграла в левой части следует существование всех интегралов в правой части и сходимость ряда.

Важные свойства интеграла Лебега. $\sigma-$аддитивность. Вторая теорема

Теорема

Если $A = \bigcup_n A_n$ *— конечное или счетное объединение непересекающихся измеримых множеств, функция* $f(x)$ *интегрируема по каждому из множеств* A_n *и ряд*

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu \tag{5}$$

сходится, то f *интегрируема на* A *и верно равенство*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)\, d\mu.$$

Важные свойства интеграла Лебега. Неравенство Чебышева

Теорема

Пусть $\varphi(x) \geqslant 0$ *— суммируемая на* A *функция,* $c > 0$ *— произвольное положительное число. Тогда*

$$\mu\{x \in A \mid \varphi(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c} \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Доказательство неравенства Чебышева

Для доказательства обозначим $A' = \{x \in A \mid \varphi(x) \geqslant c\}$. Прежде всего следует заметить, что множество A' измеримо в силу измеримости функции φ, которая, напоминаем, является необходимым условием интегрируемости. Теперь в силу только что установленных свойств аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int_A \varphi(x)\, d\mu = \int_{A'} \varphi(x)\, d\mu + \int_{A\setminus A'} \varphi(x)\, d\mu \geqslant \int_{A'} \varphi(x)\, d\mu \geqslant c\mu(A').$$

Осталось лишь разделить полученное неравенство на положительное число c.

Абсолютная непрерывность интеграла Лебега

Теорема

Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве A, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого множества $e \subset A$ с $\mu(e) < \delta$ имеет место оценка

$$\left| \int_e f(x)\, d\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказательство теоремы-1

Легко видеть, что для ограниченной функции утверждение теоремы тривиально. В общем же случае положим

$$A_n = \{x \in A \mid n \leqslant |f(x)| < n+1\}, \quad B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n, \quad C_N = A \backslash B_N.$$

В силу теоремы о $\sigma-$аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int_A |f(x)|\, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu$$

и, в частности, ряд в правой части сходится. Тогда можно выбрать такое число N, что

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu = \int_{C_N} |f(x)|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (6)$$

Доказательство теоремы-2

Выберем еще

$$\delta \in \left(0; \frac{\varepsilon}{2(N+1)}\right).$$

Тогда при $\mu(e) < \delta$, $e \subset A$ имеем

$$\left|\int_e f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int_e |f(x)|\,d\mu =$$

$$= \int_{e\cap B_N} |f(x)|\,d\mu + \int_{e\cap C_N} |f(x)|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

где первое слагаемое мы оценили в силу

$$\mu(e\cap B_N) \leqslant \mu(e) < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}, \quad |f(x)|_{B_N} < N+1,$$

а второе — в силу условия (6).



Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема Лебега

Теорема

Пусть:
1) последовательность измеримых функций f_n сходится почти всюду на множестве A к функции f;
2) для всех n почти всюду на множестве A имеет место неравенство $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, где
3) функция $\varphi(x)$ интегрируема по множеству A.
Тогда
1) функции f и f_n при всех n интегрируемы на A и
2) имеет место предельное равенство

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu. \tag{7}$$

Доказательство теоремы Лебега-1

Прежде всего понятно, что функции $\{f_n(x)\}$ и предельная функция $f(x)$ измеримы.
Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует такое $\delta > 0$, что для любого множества $B \subset A$ с $\mu(B) < \delta$ выполняется

$$\int_B \varphi(x)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Но в силу теоремы Егорова это множество B можно выбрать таким образом, чтобы на $C \equiv A \setminus B$ сходимость

$$f_n \to f$$

была равномерной на C.



Доказательство теоремы Лебега-2

Тогда мы можем выбрать такое $N \in \mathbb{N}$, что при любом $n > N$ и при любом $x \in C$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}.$$

Но при этом сразу получаем, что при всех $n > N$

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu - \int_A f_n(x)\,d\mu\right| \leqslant \leqslant \left|\int_C (f(x) - f_n(x))\,d\mu\right| + \left|\int_B f(x)\,d\mu\right| + + \left|\int_B f_n(x)\,d\mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \quad (8)$$

Теорема Беппо—Леви

Теорема

Пусть всюду на A выполнены неравенства

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots,$$

причем функции $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, интегрируемы на A и

$$\int_A f_n(x)\,d\mu \leqslant K.$$

Тогда
1) почти всюду на A существует конечный предел

$$f(x) \equiv \lim_{n\to+\infty} f_n(x);$$

2) функция f интегрируема на A и $\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu$.



Доказательство теоремы Беппо—Леви-1

Ограничимся случаем, когда $f_1(x) \geqslant 0$, потому что общий случай можно свести к нему введением функций

$$\tilde{f}_n(x) = f_n(x) - f_1(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{x \in A \mid f_n \to +\infty\}.$$

Заметим, что

$$\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}, \quad \text{где} \quad \Omega_n^{(r)} = \{x \in A \mid f_n(x) > r\}.$$



Доказательство теоремы Беппо—Леви-2

Из неравенства Чебышева следует, что при всех n, r

$$\mu(\Omega_n^r) \leqslant \frac{K}{r},$$

откуда с учетом

$$\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \dots$$

имеем

$$\mu\left(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}\right) \leqslant \frac{K}{r}.$$

Но при любом r верно включение $\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$, поэтому $\mu(\Omega) \leqslant \frac{K}{r}$, откуда следует, что $\mu(\Omega) = 0$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Доказательство теоремы Беппо—Леви-3

Для доказательства предельного соотношения введем прежде всего обозначение

$$A_m \equiv \{x \in A \mid m-1 \leqslant f(x) < m\}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

и положим $\varphi(x) = m$ на A_m. Докажем, что $\varphi(x)$ интегрируема на A. После этого останется лишь воспользоваться теоремой Лебега.

Положим

$$B_l = \bigcup_{m=1}^{l} A_m,$$

где в силу (9) объединение дизъюнктное.

Доказательство теоремы Беппо—Леви-4

Поскольку на множествах B_l функции f_n и f ограничены и $\varphi(x) \leqslant f(x) + 1$, то в силу теоремы Лебега имеем

$$\int_{B_l} \varphi(x)\, d\mu \leqslant \int_{B_l} f(x)\, d\mu + \mu(A) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_{B_l} f_n(x)\, d\mu + \mu(A) \leqslant K + \mu(A).$$

Но при всех l верно

$$\int_{B_l} \varphi(x)\, d\mu = \sum_{m=1}^{l} m\mu(A_m).$$

Равномерная ограниченность этих сумм означает (абсолютную) сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m\mu(A_m) = \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Теорема Фату

Теорема

Если последовательность интегрируемых на множестве A *неотрицательных функций* f_n *сходится почти всюду на* A *к функции* f *и при любом* $n \in \mathbb{N}$

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K,$$

то f *интегрируема на* A *и*

$$\int_A f(x)\, d\mu \leqslant K.$$

Доказательство теоремы Фату-1

Положим
$$\varphi_n = \inf_{k \geqslant n} f_k(x).$$
Полученные функции измеримы, т. к.
$$\{x \in A \mid \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \geqslant n} \{x \in A \mid f_k(x) < c\}.$$
Далее, $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$, поэтому φ_n интегрируемы и
$$\int_A \varphi_n(x)\, d\mu \leqslant \int_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K. \qquad (10)$$
С другой стороны,
$$\varphi_n(x) \to f(x)$$
почти всюду (а именно, в тех же точках, где $f_n(x) \to f(x)$).



Доказательство теоремы Фату-2

Поскольку, к тому же, при всех $x \in A$

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \ldots,$$

то по теореме Б. Леви, примененной к последовательности $\{\varphi_n\}$, имеем интегрируемость функции f и предельное соотношение

$$\int_A \varphi_n(x)\, d\mu \to \int_A f(x)\, d\mu. \qquad (11)$$

Наконец, из (10) и (11) получаем неравенство, которое утверждается в условии теоремы.

Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры

Мы ограничимся случаем так называемой σ-конечной меры. Именно, будем говорить, что на пространстве X введена σ-конечная мера, если существует такая последовательность $X_n \subset X$, что $\mu(X_n) < +\infty$, $X_n \subset X_{n+1}$ и $X = \bigcup_n X_n$. Любая такая последовательность называется исчерпывающей. (Приведем простой пример меры, не являющейся σ-конечной: возьмем меру на прямой и положим меру каждой точки равной единице.)

Определение 5. Измеримая функция f, определенная на множестве X σ-конечной меры, называется суммируемой на X, если она суммируема на каждом его измеримом подмножестве конечной меры и если для любой исчерпывающей последовательности $\{X_n\}$ предел

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{X_n} f(x)\,d\mu$$

существует и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности. Этот предел называется интегралом Лебега от функции f по множеству X и по-прежнему обозначается символом $\int_A f(x)\,d\mu$.
Для интегралов по множествам бесконечной меры сохраняют справедливость все предыдущие результаты, кроме утверждения об интегрируемости ограниченной измеримой функции.

Метрическое пространство

Теперь наша задача рассмотреть важный класс интегрируемых по Лебегу функций. Из определения интеграла Лебега ясно, что множество интегрируемых по Лебегу функций образуют линейное пространство, которое мы будем обозначать следующим образом — $\mathcal{L}(X)$. Напомним определение так называемого *метрического пространства.*

Определение 6. *Множество Y называется метрическим пространством, если на нем задана вещественная функция $d : Y \otimes Y \to \mathbb{R}^1_+$ такая, что выполнены следующие свойства:*

(i) $d(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *для всех* $x, y \in Y$;

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех* $x, y, z \in Y$.



Как сделать множество интегрируемых по Лебегу функций метрическим пространством?

Теперь введем на множестве $\mathcal{L}(X)$ — всех интегрируемых на множестве X функций относительно измеримого пространства с положительной мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — вещественную функцию

$$d(f, g) = \int\limits_X |f(x) - g(x)| \ \mu(dx). \tag{12}$$

Ясно, что на множестве $\mathcal{L}(X)$ эта функция удовлетворяет условиям (ii) и (iii) определения 6. Однако, не выполняется требование (i). Действительно, пусть интегрируемые по Лебегу функции $f(x)$ и $g(x)$ отличаются только на множестве нулевой меры Лебега μ на множестве X, тогда, очевидно, $d(f, g) = 0$, но функции $f(x) \neq g(x)$ на X.

Класс эквивалентных функций

Что с этим нам делать? Если мы вместо функций $f(x) \in \mathcal{L}(X)$ будем рассматривать классы функций, такие, что две функции $f(x), g(x) \in \mathcal{L}(X)$ принадлежат одному классу $\{f\}$, если они отличаются друг от друга на множестве нулевой меры Лебега μ на множестве X, то на полученном пространстве, которое мы будем обозначать через $L(X)$, для функции

$$d^{\circ}(\{f\}, \{g\}) = \int\limits_X |f(x) - g(x)| \, \mu(dx), \tag{13}$$

где $f(x) \in \{f\}$, $g(x) \in \{g\}$, т. е. в данной формуле мы в левой части рассматриваем метрику на классах функций, а в правой части мы берем некоторые представители из этих классов.

Корректность определения метрики

Естественно, нам нужно доказать, что значение величины в левой части не зависит от выбора представителей в правой части. Доказывается это следующим образом. Пусть $f_1(x), f_2(x) \in \{f\}$ и $g_1(x), g_2(x) \in \{g\}$. Тогда имеют место следующие неравенства, в силу того, что выполнены свойства (ii) и (iii) определения 6 для функции (12):

$$d(f, g) \leqslant d(f, f_1) + d(f_1, g_1) + d(g_1, g) = d(f_1, g_1), \tag{14}$$

$$d(f_1, g_1) \leqslant d(f_1, f) + d(f, g) + d(g, g_1) = d(f, g), \tag{15}$$

поскольку в силу определения (12) функции $d(\cdot, \cdot)$ имеют место равенства

$$d(f, f_1) = d(f_1, f) = 0, \quad d(g, g_1) = d(g_1, g) = 0.$$

Следовательно, из неравенств (14) и (15) вытекает, что

$$d(f, g) = d(f_1, g_1).$$



Класс интегрируемых по Лебегу функций—линейное пространство

Стало быть, функция d°, определенная формулой (13), определена корректно. Но теперь у нас для этой функции $d^{\circ}(\cdot,\cdot)$ помимо условий (ii) и (iii) выполнено и свойство (i). Таким образом, пространство классов интегрируемых функций $L(X)$ является метрическим пространством относительно метрики (13). Кроме того, в силу линейности пространства $\mathcal{L}(X)$ линейным является и пространство классов функций $L(X)$. Таким образом, пространство классов функций $\{f\} \in L(X)$ является линейным метрическим пространством.

Определение нормированного пространства

Определение 7. *Линейное пространство $\mathcal{E}$ называется нормированным, если на $\mathcal{E}$ задана такая функция $\|\cdot\| : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^1_+$, что выполнены свойства*

(i) $\|f\| = 0$, *тогда и только тогда, когда* $f = \theta$ — *нулевой элемент линейного пространства* $\mathcal{E}$;

(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ *для всех* $\alpha \in \mathbb{C}$ *и всех* $f \in \mathcal{E}$;

(iii) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ *для всех* $f, g \in \mathcal{E}$.

Нетрудно проверить, что линейное нормированное пространство является метрическим относительно метрики $d(x, y) = \|x - y\|$. Заметим, что если мы определим на линейном пространстве $L(X)$ норму следующим образом:

$$\|\{f\}\| = \int_X |f(x)|\mu(dx), \quad f(x) \in \{f\}, \tag{16}$$

то мы получим линейное нормированное пространство $L(X)$.

Пространства Лебега

Теперь мы рассмотрим некоторые классы функций, важных в приложениях. Дадим определение. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — это измеримое пространство с положительной мерой.

Определение 8. *Измеримые функции $f(x)$, у которых*

$$|f(x)|^p \in \mathcal{L}(X) \quad \textit{при} \quad p \in (0, +\infty), \tag{17}$$

будем обозначать как $\mathcal{L}^p(X)$.

Уже стандартным образом разбивая функции $f(x)$ из класса $\mathcal{L}^p(X)$ на классы функций $\{f\}$, мы получим класс $L^p(X)$ при $p \in (0, +\infty)$.

Пространства $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty]$

Заметим, что класс функций $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ является линейным нормированным пространством. Докажем это. Действительно, пусть $f(x), g(x) \in L^p(X)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, тогда имеет место элементарное неравенство

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)|^p \leqslant c(p) \left(|\alpha|^p |f(x)|^p + |\beta|^p |g(x)|^p\right) \in L(X),$$

поскольку пространство $L(X)$ является линейным. Стало быть, пространство $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ является линейным. Теперь определим на линейном пространстве $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ следующую числовую функцию:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} : L^p(X) \to \mathbb{R}^1_+ \qquad (18)$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет свойствам (i) и (ii) определения нормы.

Неравенство Минковского

Докажем, что для функции (18) выполнено неравенство треугольника (iii) определения нормы, т. е. докажем так называемое неравенство Минковского:

$$\left(\int_X |f(x)+g(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_X |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} + \left(\int_X |g(x)|^p \mu(dx)\right)^{1/p} \quad \text{при} \quad p \in [1+\infty). \tag{19}$$

С этой целью заметим, что при $p = 1$ это неравенство есть следствия неравенства

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad \text{для всех} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$



Неравенство Гельдера

Теперь нам нужно рассмотреть случай $p \in (1, +\infty)$. Но для этого нам предварительно нужно доказать так называемое *неравенство Гельдера.*

Теорема

Пусть $f \in L^p(X)$ *и* $g \in L^q(X)$ *при* $p, q \in (1, +\infty)$, *причем*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

тогда $fg \in L^1(X)$ *и имеет место неравенство*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{20}$$

Доказательство неравенства Гельдера-1

Для неотрицательных чисел $a, b \in \mathbb{R}^1_+$ имеет место хорошо известное неравенство:

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{21}$$

Поскольку $f \in L^p(X)$ и $g \in L^q(X)$, то f и g $\mu-$измеримы, а значит, $\mu-$измеримо и их произведение. Кроме того, их произведение определено почти всюду в Ω. Теперь возьмем

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

и подставим их в неравенство (21), откуда получим неравенство

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$



Доказательство неравенства Гельдера-2

Интегрируя обе части по мере μ на множестве X, получим неравенство

$$\int\limits_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \mu(dx) \leqslant 1.$$

Откуда сразу же вытекает неравенство Гельдера.

Неравенство Минковского

Теорема

Пусть $f, g \in L^p(X)$ *при* $p \in [1, +\infty)$, *тогда имеет место неравенство*

$$\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p \; \mu(dx) \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p \; \mu(dx) \right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \; \mu(dx) \right)^{1/p} . \quad (22)$$

Доказательство неравенства Минковского-1

Прежде всего отметим, что в силу неравенства

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant 2^{p-1}\left[|f(x)|^p+|g(x)|^p\right]$$

сумма функций $f(x)+g(x)\in L^p(X)$.
Перейдем к доказательству неравенства. Случай $p=1$ очевиден. Рассмотрим теперь случай, когда $p\in(1,+\infty)$. Заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|+|f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,.$$

Воспользуемся теперь неравенством Гельдера для обоих слагаемых в правой части этого неравенства.

Доказательство неравенства Минковского-2

Действительно, имеем

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{p-1}\,|f(x)|\;\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\;\mu(dx)\right)^{1/q} \left(\int\limits_X |f(x)|^p\;\mu(dx)\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{p}\;\mu(dx)\right)^{1/q} \left(\int\limits_X |f(x)|^p\;\mu(dx)\right)^{1/p}, \quad q=\frac{p}{p-1}.$$

Доказательство неравенства Минковского-3

Аналогичное неравенство получается и для второго слагаемого. Таким образом, получили

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \; \mu(dx) \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \; \mu(dx) \right)^{1/p} \times$$
$$\times \left[\left(\int\limits_X |f(x)|^p \; \mu(dx) \right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p \; \mu(dx) \right)^{1/p} \right].$$

Откуда получаем требуемое неравенство.

Линейное пространство $L^\infty(X)$

Следовательно, числовая функция (18) является нормой. Значит, линейное пространство $L^p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$ является линейным нормированным относительно указанной нормы. К настоящему моменту мы разобрали случай, когда $p \in [1, +\infty)$. Теперь нам нужно рассмотреть случай, когда $p = +\infty$. Сначала введем класс функций $\mathcal{L}^\infty(X)$. Дадим определение.

Определение 9. *Классом $\mathcal{L}^\infty(X)$ мы назовем класс $\mu-$измеримых функций, которые $\mu-$почти всюду являются ограниченными.*

Нормированное пространство $L^\infty(X)$

$$\|f\|_\infty \equiv \inf\{c : \mu\{x : \ |f(x)| \geqslant c\} = 0\}. \qquad (23)$$

Докажем, что эта функция действительно является нормой на $L^\infty(X)$.

Таким образом, функция (23) является нормой на линейном пространстве $L^\infty(X)$.

Неравенство Гельдера для $L^\infty(X)$ и $L^1(X)$

Необходимость введения пространства $L^\infty(X)$ вызвана, например, следующим утверждением, которое мы приведем без доказательства.

Теорема

Неравенство Гельдера остается справедливым для функции $f(x) \in L^1(X)$ и функции $g(x) \in L^\infty(X)$ и имеет вид:

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Лекция 4. Метрические пространства и их свойства

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

19 сентября 2012 г.

Определение метрического пространства

Определение 1. *Множество* Y *называется метрическим пространством, если на нем задана вещественная функция* $d : Y \otimes Y \to \mathbb{R}^1_+$ *такая, что выполнены следующие свойства:*

(i) $d(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *для всех* $x, y \in Y$;

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех* $x, y, z \in Y$.

Отметим, что неотрицательность функции $d(x, y)$ вытекает из следующего рассуждения:

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y),$$
$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z),$$

откуда $0 \leqslant |d(x, y) - d(x, z)| \leqslant d(y, z)$.



Пример

Рассмотрим полностью один нетривиальный пример. Пусть l^p при $p > 1$ — линейное пространство последовательностей комплексных чисел вида

$$x = \{x_k\}_{k=1}^{+\infty}, \quad x_k \in \mathbb{C}$$

таких, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty.$$

Введем метрику на этом линейном пространстве по формуле

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}. \qquad (1)$$

Доказательство неравенства треугольника

Докажем, что функция $d(x, y)$ является метрикой на линейном пространстве l^p при $p > 1$. Действительно, первые два свойства очевидны и в доказательстве нуждается только неравенство треугольника. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1.

Шаг 1. Докажем, что для всех $x \geqslant 1$ и $\alpha \in (0,1)$ имеет место следующее неравенство:

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leqslant 0. \qquad (2)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha$ в окрестности точки $x = 1$. По формуле Лагранжа имеем

$$x^\alpha - 1^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}(x-1), \quad z \in (1,x)$$

Отсюда сразу же получаем следующее неравенство:

$$x^\alpha - 1^\alpha \leqslant \alpha(x-1) \quad \text{при} \quad x \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \alpha \in (0,1).$$



Шаг 2. Арифметическое неравенство Гельдера.

Пусть $a > 0$, $b > 0$ и для определенности $a \geqslant b$. Тогда в неравенстве (2) положим

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{p} \quad \text{при} \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда получим следующее неравенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} - \frac{1}{p}\frac{a}{b} \leqslant 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}.$$

Умножим обе части этого неравенства на b и получим неравенство

$$a^{1/p} b^{1-1/p} - \frac{a}{p} \leqslant \frac{b}{q} \Rightarrow a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$



Шаг 3. Неравенство Гельдера

Пусть сначала $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — это последовательности неотрицательных чисел. Пусть

$$a = \frac{x_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p}, \quad b = \frac{y_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}.$$

Тогда из полученного нами арифметического неравенства Гельдера приходим к неравенству

$$\frac{x_i y_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} \frac{x_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p} + \frac{1}{q} \frac{y_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p}.$$

Шаг 3. Неравенство Гельдера

Теперь просуммируем по $i = \overline{1, n}$ и получим неравенство

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Таким образом, приходим к неравенству Гельдера

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q}.$$

Шаг 4. Неравенство Минковского.

Итак, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p-1}x_i + \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{p-1}y_i \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{(p-1)/p} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}\right], \quad (3)$$

Значит,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

Неравенство Минковского в комплексном случае.

Пусть $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ — это комплексные последовательности, тогда по доказанному получаем следующее неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Наконец, осталось воспользоваться очевидным неравенством

$$|x_i+y_i| \leqslant |x_i|+|y_i|.$$

Теперь осталось перейти к пределу при $n \to +\infty$ и получить неравенство Минковского для линейного пространства l^p при $p > 1$. Случай $p = 1$ рассматривается очевидным образом.

Открытые и замкнутые множества. Определения.

Определение 2. Открытый шар $O(a, r)$ и замкнутый шар $K(a, r)$ метрического пространства (X, d) :

$$O(a, r) \equiv \{x \in X : \ d(x, a) < r\}, \quad K(a, r) \equiv \{x \in X : \ d(x, a) \leqslant r\}.$$

Определение 3. Открытое множество — множество, содержащее вместе с каждой точкой некоторый открытый шар. Замкнутое множество — дополнение открытого.

Определение 4. Внутренняя точка множества — содержится во множестве вместе с некоторым открытым шаром. Внешняя точка — содержится вместе с некоторым открытым шаром в дополнении множества.

Определение 5. Изолированная точка — существует проколотый открытый шар с центром в этой точке, непересекающийся с этим множеством.

Определение 6. Предельная точка — любой открытый шар с центром в этой точке содержит точку этого множества, отличную от данной.

Определение 7. Окрестностью точки метрического пространства называется любое множество, содержащее данную точку вместе с некоторым открытым шаром.

Определение 8. Открытой окрестностью точки называется произвольное открытое множество, содержащее данную точку.

Лемма о топологии.

Лемма

(i) *Объединение любого числа открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств — открытое множество;*

(ii) *Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множества;*

(iii) *Само пространство X и $\emptyset$ — открыто–замкнутые множества.*

Доказательство леммы о топологии.

Итак, пусть $\{\Sigma_\alpha : \alpha \in A\}$ — произвольное семейство открытых множеств и пусть

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha,$$

тогда найдется такое $\alpha_0 \in A$ и такой открытый шар $O(x, r)$ что

$$x \in O(x, r) \subset \Sigma_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha.$$

Следовательно, объединение произвольного числа открытых множеств — открытое множество.

Доказательство леммы о топологии.

Пусть теперь

$$\Sigma \equiv \bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_k - \quad \text{пересечение конечного числа открытых множеств.}$$

Пусть $x \in \Sigma$, тогда найдутся такие открытые шары $O(x, r_k)$, что

$$x \in O(x, r_k) \subset \Sigma_k.$$

Определим теперь $r = \min\{r_k,\ k = \overline{1, n}\}$, тогда, очевидно, что

$$x \in O(x, r) \subset \Sigma.$$

Доказательство леммы о топологии.

Второе утверждение леммы о топологии вытекает из первого переходом к дополнениям. Действительно, пусть

$\{S_\alpha :\ \alpha \in A\}-$ произвольное семейство замкнутых множеств.

Тогда имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} (X\backslash\Sigma_\alpha) = X\backslash\left(\bigcup_{\alpha\in A} \Sigma_\alpha\right),$$

где мы ввели обозначение

$$S_\alpha = X\backslash\Sigma_\alpha.$$

С другой стороны, имеет место следующая цепочка равенств множеств:

$$\bigcup_{k=1}^{n} S_k = \bigcup_{k=1}^{n} (X\backslash\Sigma_k) = X\backslash\left(\bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_k\right), \quad S_k = X\backslash\Sigma_k.$$

Отсюда приходим к утверждению.

Замыкание множества.

Определение 9. Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество A, называется замыканием множества и обозначается как $\overline{A}$.

Справедливы следующие свойства замыкания множества, которые мы без доказательств собрали в одной лемме.

Лемма

(i) $A \subset \overline{A}$, $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$;

(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(iii) $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\overline{X} = X$;

(vi) *вообще говоря*, $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Ясно, что всякое подмножество Y метрического пространства (X, d) является метрическим пространством (Y, d). Мы ранее выяснили, что в метрическом пространстве (X, d) открыто–замкнутыми множествами заведомо являются само множество X и $\emptyset$. Однако существуют такие метрические пространства, у которых есть и другие открыто–замкнутые множества. Дадим определение.

Определение 10. Метрическое пространство (X, d) является связным, если в нем нет других открыто–замкнутых подмножеств, кроме X и $\emptyset$.

Пример. Пусть A и B — это два непересекающихся подмножества множества X. Тогда $(A \cup B, d)$ — это несвязное метрическое пространство.

Плотные и не плотные множества. Определения.

Определение 11. Множество A метрического пространства (X, d) называется плотным во множестве B этого же пространства, если $B \subset \overline{A}$.
Определение 12. Множество A называется всюду плотным в метрическом пространстве (X, d), если $\overline{A} = X$.
Определение 13. Множество A называется нигде не плотным в метрическом пространстве, если всякое открытое множество метрического пространства (X, d) содержит другое открытое множество, целиком свободное от точек множества A.
Определение 14. Метрическое пространство (X, d) называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество.

Пример сепарабельного пространства.

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно метрики

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|\,.$$

Это пространство является сепарабельным, поскольку в силу известной теоремы Стоуна любую непрерывную функцию можно приблизить полиномом с рациональными коэффициентами

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_k \in \mathbb{Q}.$$



Пример несепарабельного пространства.

Введем в рассмотрение следующее метрическое пространство. Рассмотрим всевозможные последовательности вещественных чисел $\{x_k\}$, для которых

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < +\infty.$$

Введем на этом пространстве следующую метрику:

$$d(x, y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|.$$

Это метрическое пространство обозначается как m. Докажем, что это пространство не является сепарабельным.

Доказательство несепарабельности.

С этой целью нам нужно предъявить такое подмножество E_0 множества m, которое нельзя приблизить с любой наперед заданной точностью элементами некоторого счетного множества. В качестве такого множества E_0 возьмем произвольные последовательности, состоящие из нулей и единиц:

$$\{x_k\}, \quad x_k = 0 \quad \text{либо} \quad x_k = 1.$$

Можно проверить, что мощность этого множества E_0 континуум. Кроме того, расстояния между различными точками этого множества равно 1. И, следовательно, приблизить каждую точку множества E_0 элементами некоторого счетного множества нельзя, поскольку шары радиуса $1/3$ с центрами в точках множества E_0 не пересекаются и имеют мощность континуум.



Совершенные множества и множество Кантора.

Определение 15. Множество метрического пространства называется совершенным, если оно замкнуто и состоит из предельных точек.

Предъявим алгоритм построения так называемого множества Кантора. Рассмотрим отрезок $I = [0, 1]$, который мы разделим на три равные части и выкинем из него интервал $(1/3, 2/3)$. Теперь оставшиеся отрезки также разделим на три равные части и из них также выкинем серединные интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$ и т.д. В результате на $n-$ом шаге получим замкнутое множество I_n длиной 3^{-n}, причем выполнена цепочка вложений

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots.$$



Лемма о множестве Кантора.

Рассмотрим множество Кантора

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Лемма

Множество Кантора K является совершенным и нигде не плотным множеством.

Доказательство леммы. Совершенность множества.

Прежде всего заметим, что в силу леммы о топологии канторово множество замкнуто. Кроме того, докажем, что состоит из предельных точек. Действительно, пусть $x \in K$. Рассмотрим произвольную окрестность этой точки Σ_x, которая, согласно определению, содержит открытый интервал $\sigma_x \in \Sigma_x$ с центром в точке x. Пусть Λ_n — это тот отрезок из множества I_n, который содержит точку x. Заметим, что при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ имеем $\Lambda_n \in \sigma_x$. Пусть $a_n \in \Lambda_n$ — это тот конец отрезка Λ_n, который не совпадает с $x \neq a_n$. Следовательно, для произвольной окрестности Σ_x точки x нашлась точка $a_n \in K$ такая, что $x \neq a_n \in \Sigma_x$.
Таким образом, множество Кантора совершенно.

Доказательство леммы. Нигде не плотность.

Докажем, что множество Кантора K является нигде не плотным множеством на отрезке $[0, 1]$. Пусть Σ — это произвольное открытое множество на отрезке $[0, 1]$. Ясно, что если на этом множестве нет точек Канторова множества, то доказывать нечего. Пусть, однако, $x \in K \cap \Sigma$. Теперь возьмем тот отрезок Λ_m, который содержит точку x. Возьмем теперь интервал с центром в середине этого отрезка Λ_m и радиуса 2^{-m-1}. Этот интервал не принадлежит Канторову множеству. Таким образом, нигде не плотность доказана.

Непрерывность отображений метрических пространств. Определение по Коши.

Как вам известно из курса математического анализа, существуют два определения непрерывности отображений метрических пространств. Дадим определение по Коши.

Определение 16. Отображение

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Коши в точке $x_0 \in X$, если для всякой окрестности $\Sigma_{g(x_0)} \subset Y$ точки $g(x_0)$ найдется окрестность $\Sigma_{x_0} \subset X$ точки x_0, что

$$g(\Sigma_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)}.$$



Непрерывность отображений метрических пространств. Определение по Хайне.

Сначала дадим определение сходимости последовательности точек в метрическом пространстве.

Определение 17. Последовательность $\{x_n\}$ метрического пространства (X, d) называется сходящейся к точке $x_0 \in X$, если $d(x_n, x_0) \to +0$ при $n \to +\infty$.

Теперь дадим определение по Хайне.

Определение 18. Отображение

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

называется непрерывным по Хайне в точке $x_0 \in X$, если для всякой сходящейся к точке x_0 последовательности $\{x_n\}$ соответствующая последовательность $\{g(x_n)\}$ сходится к точке $g(x_0)$ в метрическом пространстве (Y, ρ).



Вспомогательная лемма.

Без доказательства приведем следующую очевидную лемму.

Лемма

Точка a *принадлежит замыканию* $\overline{A}$ *множества* A *метрического пространства* (X, d) *тогда и только тогда, когда существует последовательность* $\{x_n\} \subset A$, *что*

$$x_n \to a.$$

Теорема об открытом отображении.

Теорема

Отображение

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

является непрерывным в каждой точке пространства X *тогда и только тогда, когда полный прообраз* $G \subset X$ *открытого множества* $\Sigma \subset Y$ *открыт в* X.

Доказательство теоремы об открытом отображении.

Пусть g — непрерывное отображение по Коши и пусть S — открытое множество в (Y, ρ). Если полный прообраз множества S пуст, то он, очевидно, открытое множество. Пусть прообраз $S \neq \emptyset$. Для всякой точки

$$x_0 \in g^{-1}(S)$$

открытая окрестность $x_0 \in \Sigma_{x_0}$, что $g(\Sigma_{x_0}) \subset S$. Рассмотрим множество

$$g^{-1}(S) = \bigcup_{x_0 \in g^{-1}(S)} \Sigma_{x_0},$$

которое, очевидно, является открытым.

Доказательство теоремы об открытом отображении.

Теперь докажем утверждение в обратную сторону. Пусть $\Sigma_{g(x_0)}$ — это открытая окрестность точки $g(x_0)$. Тогда

$$g^{-1}(\Sigma_{g(x_0)})$$

это открытое множество метрического пространства (X, d), образ которого содержится в $\Sigma_{g(x_0)}$.

Эквивалентность определений по Коши и по Хайне.

Теорема

Определение по Коши эквивалентно определению по Хайне.

Отметим, что это достаточно сильное утверждение, поскольку в более общих топологических пространствах, которые мы скоро будем изучать, из определения по Хайне, вообще говоря, не следует определение по Коши, хотя из определения по Коши всегда следует определение по Хайне.

Доказательство.

Пусть

$$g : (X, d) \to (Y, \rho)$$

есть непрерывное отображение по Коши. Докажем, что оно непрерывно по Хайне. Действительно, пусть

$$x_n \to x_0 \quad \text{в} \quad (X, d),$$

тогда для любой окрестности $\Sigma_{g(x_0)} \subset Y$ найдется такая окрестность $S_{x_0} \subset X$ точки x_0, что

$$g(S_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)}.$$

Но $x_n \in S_{x_0}$ начиная с некоторого номера и поэтому

$$g(x_n) \subset g(S_{x_0}) \subset \Sigma_{g(x_0)}.$$

Значит, последовательность $\{g(x_n)\}$ сходится к $g(x_0)$.

Доказательство.

Докажем теперь утверждение в обратную сторону. Итак, пусть Σ — это открытое множество метрического пространства (Y, ρ). Докажем, что его полный прообраз

$$G = \{x \in X : \ g(x) \in \Sigma\}$$

является открытым множеством. Пусть нет. Тогда найдется такая точка $x_0 \in G$, что $x_0 \in \overline{X \backslash G}$, Но тогда найдется такая последовательность $\{x_n\} \notin G$, что

$$x_n \to x_0 \quad \text{в} \quad (X, d).$$

Тогда $\{g(x_n)\} \notin \Sigma$, но при этом

$$g(x_n) \to g(x_0) \in \Sigma.$$

Это противоречит открытости множества Σ.



Компактность и локальная компактность.

Определение 19. Открытым покрытием множества A называется произвольное семейство $\{G_\alpha\}$ открытых множеств такое, что

$$A \subset \bigcup_{\alpha} G_\alpha.$$

Определение 20. Метрическое пространство (X, d) называется компактным, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Компактное метрическое пространство также называют просто компактом.

Определение 20a. Множество в метрическом пространстве (X, d) называется компактным, если из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 21. Метрическое пространство (X, d) называется локально компактным, если всякая его точка имеет



Центрированные множества.

Определение 22. Произвольное семейство множеств $\{F_\alpha\}$ называется центрированным, если всякое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение.

Теорема

Для того чтобы метрическое пространство (X, d) было компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякая центрированная система его замкнутых подмножеств имела непустое пересечение.

Доказательство теоремы.

Пусть (X, d) — компактно. А $\{F_\alpha\}$ — это произвольная центрированная система его замкнутых подмножеств. Тогда $G_\alpha = X \backslash F_\alpha$ — это семейство открытых множеств, причем никакая конечная подсистема этой системы не покрывает пространство X, поскольку в противном случае соответствующая конечная подсистема из $\{F_\alpha\}$ имела бы пустое пересечение, что противоречит центрированности. Поэтому система $\{G_\alpha\}$ не покрывает X в силу компактности X. Значит $\{G_\alpha\}$ не покрывает X и, следовательно,

$$\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset.$$

Доказательство теоремы.

Теперь мы докажем утверждение в обратную сторону.
Итак, пусть всякая центрированная его система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Пусть $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие множества X, тогда

$$F_\alpha = X \backslash G_\alpha$$

— это система замкнутых множеств, причем

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset,$$

так как $\{G_\alpha\}$ покрывает X. Следовательно, $\{F_\alpha\}$ не является центрированной. Значит, некоторая его конечная подсистема

$$\{F_k\}_{k=1}^N$$

имеет пустое пересечение. Таким образом,

$$\{G_k\}_{k=1}^N, \quad G_k = X \backslash F_k \quad \text{покрывает} \quad X.$$

Значит, X — компакт.

Некоторые свойства компактных пространств.

Лемма

(i) *Замкнутое подмножество компактного метрического пространства является компактом;*

(ii) *Образ компактного пространства при непрерывном отображении — компактное пространство;*

(iii) *Компактное множество метрического пространствазамкнуто в этом пространстве.*

Топология метрических пространств.

Дадим определение базы топологии метрического пространства.

Определение 23. Базой топологии $\mathfrak{B}$ метрического пространства (X, d) называется такая система открытых множеств, что любое открытое множество Σ можно представить в виде

$$\Sigma = \bigcup_{\alpha} B_\alpha, \quad B_\alpha \in \mathfrak{B}.$$

Лемма

Для того чтобы система открытых множеств $\mathfrak{B}$ было базой топологии метрического пространства (X, d), необходимо и достаточно, чтобы для всякого открытого множества G и его точки $a \in G$ нашлось такое множество $\Sigma_a \in \mathfrak{B}$, что $a \in \Sigma_a \subset G$.

Доказательство леммы.

Пусть $\mathfrak{B}$ — база топологии. Тогда для любого открытого множества G и его точки $a \in G$ найдется такая подсистема

$$\{\Sigma_\alpha\} \in \mathfrak{B},$$

что

$$G = \bigcup_\alpha \Sigma_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0, \ a \in \Sigma_{\alpha_0} \subset G.$$

Пусть теперь для всякого открытого множества G и его точки $a \in G$ найдется такое $\Sigma_a \in \mathfrak{B}$, что

$$a \in \Sigma_a \subset G.$$

Но тогда

$$G = \bigcup_{a \in G} \Sigma_a.$$

Значит, $\mathfrak{B}$ — база топологии.



Метрические пространства со счетной базой.

Определение 24. Метрическое пространство называется пространством со счетной базой, если существует хотя бы одна база топологии, состоящая из счетного числа множеств.

Лемма

Метрическое пространство является пространством со счетной базой, если в нем существует счетное всюду плотное множество, т. е. если это метрическое пространство сепарабельно.

Свойства метрических пространств.

Определение 25. Последовательность $\{x_n\}$ метрического пространства (X, d) называется фундаментальной, если

$$d(x_n, x_m) \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

Определение 26. Метрическое пространство является полным, если каждая его фундаментальная последовательность сходится.

В качестве примера рассмотрим линейное метрическое пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно метрики

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Дальнейшее рассмотрение примера.

Итак, пусть $\{f_n(x)\}$ — это фундаментальная последовательность относительно указанной метрики. Это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant N$ имеет место неравенство

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Т.е. последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к непрерывной функции. Теперь осталось перейти к пределу при $m \to +\infty$ и (в силу теоремы о непрерывности равномерного предела непрерывных функций) получить полноту этого пространства.

Изометрия метрических пространств.

Рассмотрим линейное метрическое пространство $\mathbb{B}(\Omega)$ ограниченных функций относительно метрики

$$d(f,g) = \sup_{x\in\Omega} |f(x) - g(x)|.$$

Определение 27. Отображение

$$\mathrm{J} : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$$

двух метрических пространств называется изометрией, если

$$d_2(\mathrm{J}f, \mathrm{J}g) = d_1(f,g) \quad \text{для всех} \quad f, g \in X_1.$$

Лемма о изометрии метрических пространств.

Лемма

Пусть (X_1, d_1) *и* (X_2, d_2) *— это два полных метрических пространства и*

$$E_1 \overset{ds}{\subset} X_1, \quad E_2 \overset{ds}{\subset} X_2,$$

где между E_1 *и* E_2 *имеется изометрия* J*, причем* $\mathrm{J}E_1 = E_2$*. Тогда изометрия* J *продолжается единственным образом до изометрии между* (X_1, d_1) *и* (X_2, d_2)*.*

Здесь и всюду далее мы обозначаем символом

$$E \overset{ds}{\subset} X$$

всюду плотное вложение.



Доказательство леммы-1.

Итак, пусть $x \in X_1 \backslash E_1$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, которая сходится к x. Но тогда последовательность $\{\mathrm{J} x_n\}$ в силу полноты метрического пространства (X_2, d_2) и того, что

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), y) = d_1(x_n, x) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

при некотором $y \in X_2$. Обозначим через

$$\mathrm{J}(x) = y.$$

Проверим корректность определения $\mathrm{J}(x)$. Пусть существует другая последовательность $\{y_n\} \subset E_1$, которая сходится к x. Но тогда последовательность $\{\mathrm{J}(y_n)\}$ тоже сходится к $\mathrm{J}(x)$, поскольку последовательность

$$x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...$$

сходится к x.

Доказательство леммы-2.

Проверим, что так определенное продолжение изометрии J сохраняет расстояния. Действительно, пусть $x, y \in X_1$, тогда

$$d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)) = \lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)) = \lim_{n\to+\infty} d_1(x_n, y_n) = d_1(x, y).$$

Действительно, это следствие следующих рассуждений:

$$d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(x_n)) + d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)) + d_2(\mathrm{J}(y_n), \mathrm{J}(y)).$$

Отсюда получаем, что

$$d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)) \leqslant \lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)).$$

Кроме того, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(x)) + d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)) + d_2(\mathrm{J}(y), \mathrm{J}(y_n)),$$

из которой сразу же получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)) \leqslant d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)).$$

Доказательство леммы-3.

Значит,

$$d_2(\mathrm{J}(x), \mathrm{J}(y)) = \lim_{n \to +\infty} d_2(\mathrm{J}(x_n), \mathrm{J}(y_n)).$$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$d_1(x, y) = \lim_{n \to +\infty} d_1(x_n, y_n).$$

Наконец, докажем, что

$$\mathrm{J}(X_1) = X_2.$$

Действительно, для каждой точки $y \in X_2$ найдется такая последовательность $\{y_n\} \subset E_2$, что

$$d_2(y_n, y) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$



Доказательство леммы-4.

Это в свою очередь означает, что найдется такая последовательность $\{x_n\} \subset E_1$, что

$$d_2(\mathrm{J}(x_n), y) \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Но в силу изометрии J последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в (X_1, d_1) и, значит, сходится к $x \in X_1$. Стало быть, для каждого $y \in X_2$ найдется такое $x \in X_1$, что

$$\mathrm{J}(x) = y.$$

Отсюда следует единственность продолжения изометрии.

Лемма доказана.



Одна теорема об изометрии метрического пространства (X, d) и подмножества метрического пространства $\mathbb{B}(X)$.

Теорема

Всякое метрическое пространство (X, d) изометрично некоторой части метрического пространства $\mathbb{B}(X)$.

Доказательство теоремы-1.

Итак, пусть метрическое пространство (X, d) не пусто. Тогда найдется точка $x_0 \in X$. Определим функцию на метрическом пространстве (X, d) следующим образом:

$$f_x(y) = d(y, x) - d(x_0, y). \tag{4}$$

Отметим, что имеет место следующее неравенство:

$$|d(y, x) - d(x_0, y)| \leqslant d(x, x_0) \tag{5}$$

□ Действительно, имеют место следующие неравенства:

$$d(y, x) \leqslant d(y, x_0) + d(x_0, x), \quad d(y, x_0) \leqslant d(x_0, x) + d(x, y).$$

Из этих двух неравенств вытекает неравенство (5). ☒



Доказательство теоремы-2.

Значит,

$$|f_x(y)| \leqslant d(x, x_0),$$

т. е. функция $f_x(y)$ для каждого фиксированного $x \in X$ принадлежит метрическому пространству $\mathbb{B}(X)$. Для фиксированных $x_1, x_2 \in X$ имеют место следующие цепочки выражений:

$$|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |d(y, x_1) - d(y, x_2)| \leqslant d(x_1, x_2).$$

Отсюда получаем, что

$$d_0(f_{x_1}, f_{x_2}) = \sup_{y \in X} |f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| \leqslant d(x_1, x_2). \qquad (6)$$



Доказательство теоремы-3.

Докажем, что на самом деле в неравенстве (6) имеет место равенство. С этой целью достаточно указать такое $y \in X$, что имеет место равенство. Действительно, пусть $y = x_1$, тогда имеем

$$|f_{x_1}(x_1) - f_{x_2}(x_1)| = d(x_1, x_2).$$

Итак,

$$d_0(f_{x_1}, f_{x_2}) = d(x_1, x_2).$$

Таким образом, установлена изометрия между всем метрическим пространством (X, d) и частью метрического пространства $\mathbb{B}(X)$.

Теорема доказана.

Пополнение метрических пространств.

Определение 28. Пополнением $\widetilde{X}$ метрического пространства X называется полное метрическое пространство, в котором X изометрично некоторому всюду плотному подмножеству в $\widetilde{X}$.

Теорема

Всякое метрическое пространство имеет единственное с точностью до изометрии пополнение.

Доказательство теоремы.

По доказанной ранее теореме об изометрии метрическое пространство (X, d) изометрично некоторому подмножеству полного метрического пространства $\mathbb{B}(X)$; пусть J — это изометрия, о которой идет речь. Тогда рассмотрим

$$\mathrm{J}X \subset \mathbb{B}(X).$$

Замыкание множества $\mathrm{J}X$ в полном метрическом пространстве $\mathbb{B}(X)$, очевидно, является полным метрическим пространством. Обозначим это замыкание через $\widetilde{\mathbb{B}}(X)$. Теперь в качестве пополнения метрического пространства (X, d) можно взять

$$(\widetilde{X}, d), \quad \text{где} \quad \widetilde{X} = \mathrm{J}^{-1}\widetilde{\mathbb{B}}(X),$$

(Привести диаграмму на доске).

Теорема доказана.



Теорема о вложенных шарах.

Теорема

Пусть (X, d) *— это полное метрическое пространство и* $\{B_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *— семейство замкнутых шаров, причем* $B_{n+1} \subset B_n$ *и радиусы шаров стремятся к 0, тогда*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \emptyset.$$

Доказательство теоремы о вложенных шарах.

Действительно, возьмем последовательность $\{a_n\}$ такую, что $a_n \in B_n$. Поскольку шары вложены и их радиусы стремятся к нулю, то эта последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна. Это следует из того, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное $N \in \mathbb{N}$, что при $n, m > N$

$$a_n, a_m \in B_{\min\{n,m\}},$$

а радиус шара $B_{\min\{n,m\}}$ стремится к нулю при $N \to +\infty$. Следовательно, в силу полноты (X, d) сходится к a, которая в силу замкнутости шаров B_n принадлежит их пересечению.

Теорема доказана.

Теорема Бэра о категориях.

Теорема

Пусть (X, d) *— это полное метрическое пространство, которое представимо в виде*

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n, \quad X_n = \overline{X}_n,$$

тогда хотя бы одно множество X_{n_0} *содержит открытый шар положительного радиуса.*

Доказательство теоремы Бэра о категориях-1.

Если $X = X_1$, то доказывать нечего, поскольку тогда X_1 содержит все открытые шары. Пусть $X \neq X_1$, тогда $X \backslash X_1$ открыто и тогда найдется такой непустой открытый шар $O(x_1, \varepsilon_1) \subset X \backslash X_1$, причем

$$O(x_1, \varepsilon_1) \cap X_1 = \emptyset.$$

Если теперь $O(x_1, \varepsilon_1) \subset X_2$, тогда утверждение доказано. Пусть нет. Тогда найдется открытый шар

$$O(x_2, \varepsilon_2) \subset O(x_1, \varepsilon_1) \cap X \backslash X_2, \quad \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

Понятно, что

$$O(x_2, \varepsilon_2) \cap (X_1 \cup X_2) = \emptyset.$$



Доказательство теоремы Бэра о категориях-2.

Таким образом, на n-ом шаге мы либо найдем непустой открытый шар $O(x_n, \varepsilon_n) \subset X_n$ либо получим цепочку вложенных открытых шаров

$$O(x_n, \varepsilon_n) \subset O(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \subset \cdots \subset O(x_2, \varepsilon_2) \subset O(x_1, \varepsilon_1), \quad \varepsilon_n < \frac{\varepsilon_{n-1}}{4}.$$

При этом

$$d(x_n, x_{n+m}) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon_n}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \right) < \frac{\varepsilon_n}{3}. \quad (7)$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной и сходящейся к некоторому элементу $x_0 \in X$ в силу полноты (X, d).



Доказательство теоремы Бэра о категориях-3.

Теперь перейдем к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве (7) и получим, что

$$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon_n}{3} \Rightarrow x_0 \in O(x_n, \varepsilon_n) \Rightarrow x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} X_n.$$

В пределе при $n \to +\infty$ получим, что $x_0 \notin X$. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема

Пусть (X, d) *— это полное метрическое пространство и непрерывные функции*

$$f_n(x) : (X, d) \to \mathbb{R}^1$$

таковы, что последовательность $\{f_n(x)\}$ *ограничена для всякого фиксированного* $x \in X$*. Тогда найдется такой замкнутый шар* $K \subset X$ *положительного радиуса, что*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in K} |f_n(x)| < +\infty.$$

Доказательство.

Введем множества

$$X_N = \left\{ x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leqslant N \right\}.$$

В силу непрерывности $f_n(x)$ множества X_N замкнуты. А поскольку последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена, то

$$X = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N.$$

Следовательно, в силу теоремы Бэра о категориях найдется такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что X_{N_0} содержит внутренние точки, а следовательно, некоторый замкнутый шар K. И, следовательно,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in K} |f_n(x)| < +\infty.$$

Лекция 5. Топологические пространства и их свойства

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

18 октября 2012 г.

Определение топологического пространства

Определение 1. Произвольное множество X с выделенной системой подмножеств τ множества X называется топологическим пространством (X, τ), если выполнены следующие свойства:

(i) $X,\ \emptyset \in \tau$;

(ii) произвольное объединение множеств из τ есть множество из τ;

(iii) конечное пересечение множеств из τ есть множество из τ;

при этом система подмножеств τ называется топологией.

Примеры.

Пример 1. Рассмотрим произвольное множество X и топологию $\tau = \{X, \emptyset\}$. Это топологическое пространство, которое называется антидискретным или слипшимся.

Пример 2. Рассмотрим множество X и топологию $\tau = 2^X$, т. е. τ состоит из всех подмножеств множества X. Это топологическое пространство называется дискретным, поскольку топологии τ принадлежат все одноточечные множества $\{x\}$ при $x \in X$.

Понятие окрестности и локальной базы топологии.

Определение 2. Окрестностью точки $x \in X$ топологического пространства (X, τ) называется произвольное множество $U \in \tau$ такое, что $x \in U$.

Заметим, что задавать всю систему множеств τ довольно трудно на практике, поэтому вводят понятие Фундаментальной Системы Окрестностей (ФСО). С этой целью обозначим через τ_x все множества из топологии τ, содержащие точку x.

Определение 3. Локальной базой топологии в точке $x \in X$ называется семейство множеств $\nu_x \subset \tau_x$ такое, что для всякого $U \in \tau_x$ найдется такое $V \in \nu_x$, что $V \subset U$.

Примеры.

Отметим, что в качестве локальной базы точки x метрического пространства (X, d) можно взять шары

$$O_n\left(x, \frac{1}{n}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

В частности, в качестве локальной базы метрического пространства (X, δ) с дискретной метрикой

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = y\,; \\ 0, & \text{при } x \neq y \end{cases}$$

в качестве локальной базы можно взять одноточечное множество $\{x\}$.

Понятие ФСО.

Теперь мы фиксируем локальную базу окрестностей ν_x в каждой точке x топологического пространства (X, τ). Справедливо представление для этого семейства множеств

$$\nu_x = \{V_{x,\alpha} : \ \alpha \in A_x\},$$

где A_x — это для каждого $x \in X$ семейство индексов, нумерующее семейство множеств ν_x.

Определение 4. Фундаментальной Системой Окрестностей (ФСО) называется семейство множеств

$$\nu = \{V_{x,\alpha} : \ x \in X, \ \alpha \in A_x\}.$$



Теорема о ФСО.

Предположим, что нам задано семейство множеств

$$\nu_x = \{V_{x,\alpha} : \alpha \in A_x\}.$$

Теорема

Семейство множеств $\nu = \{V_{x,\alpha} : x \in X, \alpha \in A_x\}$ *является ФСО для некоторой единственной топологии* τ*, тогда и только тогда, когда выполнены следующие свойства*

- (i)$_1$ *для любой точки* $x \in X$ *множество* ν_x *не пусто и для каждого* $V_{x,\alpha} \in \nu_x$ *имеем* $x \in V_{x,\alpha}$;
- (ii$_1$) *для каждых* $V_{x,\alpha_1}, V_{x,\alpha_2} \in \nu_x$ *найдется такое* $V_{x,\alpha_3} \in \nu_x$, *что*

$$V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2};$$

- (iii$_1$) *для любого* $x \in X$ *и каждого* $V_{x,\alpha} \in \nu_x$ *и для любого* $y \in V_{x,\alpha}$ *найдется* $V_{y,\beta} \in \nu_y$, *что* $V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}$.



Доказательство теоремы о ФСО-1.

Итак, пусть семейство ν является ФСО для некоторой топологии τ. Тогда свойства (i_1) и $(\mathrm{ii})_1$ очевидны. Докажем, что имеет место свойство $(\mathrm{iii})_1$. Пусть $x \in X$ и $V_{x,\alpha} \in \nu_x$. Тогда поскольку

$$\nu_x \subset \tau_x \subset \tau,$$

то в силу свойства $(\mathrm{i})_1$ для каждого

$$y \in V_{x,\alpha} \subset \tau$$

найдется такое

$$V_{y,\beta} \in \nu_y,$$

что

$$V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}.$$

Таким образом, семейство ν — ФСО.



Доказательство теоремы о ФСО-2.

Докажем утверждение в обратную сторону. Определим топологию τ как такое семейство множеств, что для каждого $x \in U \in \tau$ найдется такое множество

$$V_{x,\alpha} \in \nu_x,$$

что

$$V_{x,\alpha} \subset U.$$

Понятно, что X и $\emptyset$ принадлежат топологии τ. Ясно, что объединение любого числа множеств из τ есть множество из τ.

Доказательство теоремы о ФСО-3.

Докажем теперь свойство (iii) определения топологии.

Пусть $U_1, U_2 \in \tau$ и $x \in U_1 \cap U_2$. Тогда найдутся такие V_{x,α_1} и V_{x,α_2} из ν_x, что

$$V_{x,\alpha_1} \subset U_1 \quad \text{и} \quad V_{x,\alpha_2} \subset U_2.$$

Тогда по свойству $(\mathrm{ii})_1$ найдется такое $V_{x,\alpha_3} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2} \subset U_1 \cap U_2.$$

Стало быть,

$$U_1 \cap U_2 \in \tau.$$



Доказательство теоремы о ФСО-4.

Теперь наша задача доказать, что ν — это ФСО для данной топологии τ. Действительно, в силу свойства $(\mathrm{iii})_1$ имеем

$$\nu_x \subset \tau_x,$$

поскольку для каждого

$$V_{x,\alpha} \in \nu_x$$

и каждой точки $y \in V_{x,\alpha}$ найдется такое

$$V_{y,\beta} \in \nu_y, \quad \text{что} \quad V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}.$$

Стало быть,

$$V_{x,\alpha} \in \tau_x$$

и ν_x — локальная база топологии τ.



Доказательство теоремы о ФСО-5.

Теперь наша задача доказать единственность так введенной топологии τ.

Итак, пусть существуют две топологии τ и $\tau^{'}$, причем $\nu \in \tau$ и $\nu \in \tau^{'}$. Пусть $U \in \tau$, тогда для всякой точки $x \in U$ найдется такое $V_{x,\alpha(x)} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha(x)} \subset U,$$

но тогда

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} V_{x,\alpha(x)} \subset U.$$

Значит,

$$U = \bigcup_{x \in U} V_{x,\alpha(x)} \in \nu \subset \tau^{'}$$

Итак, $U \in \tau^{'}$. Аналогично в обратную сторону.

Пример 3. Рассмотрим множество $\mathbb{C}(X)$ — линейное пространство непрерывных на не пустом множестве X. Введем топологию равномерной сходимости τ, порожденную согласно теоремы о ФСО, следующей системой окрестностей

$$V_{x,\varepsilon} = \left\{ y(t) \in \mathbb{C}(X) : \sup_{t \in X} |x(t) - y(t)| < \varepsilon \right\}.$$

Соответствующая топология τ называется топологией равномерной сходимости.

Пример 4. Рассмотрим тоже множество $\mathbb{C}(X)$. Пусть

$$\{t_i\}_{i=1}^{n} \subset X,$$

тогда определим ФСО, состоящим из следующих окрестностей

$$V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} = \left\{y(t) \in \mathbb{C}(X) : |y(t_i) - x(t_i)| < \varepsilon,\ i = \overline{1,n}\right\}.$$

Соответствующая топология τ_p называется топологией по точечной сходимости. Пространство $\mathbb{C}(X)$, наделенное такой топологией обозначается как $\mathbb{C}_p(X)$.

Сравнение топологий.

Когда на одном и том же множестве X заданы две топологии τ_1 и τ_2 возникает вопрос о том, как они соотносятся.

Определение 5. $\tau_1 \geqslant \tau_2$, если имеет место множественное вложение $\tau_2 \subseteq \tau_1$. При этом говорят, что топология τ_1 сильнее топологии τ_2, а топология τ_2 слабее топологии τ_1. Если эти топологии

$$\tau_1 \not\subset \tau_2 \quad \text{и} \quad \tau_2 \not\subset \tau_1,$$

то говорят, что топологии несравнимы. Если же имеет место строгое вложение

$$\tau_2 \subset \tau_1,$$

то говорят, что топология τ_1 существенно сильнее, а топология τ_2 существенно слабее.



Определение 6. Топологическое пространство (X, τ) называется метризуемым, если существует такая метрика d, что ФСО, определенное этой метрикой, порождает топологию τ.

Ясно, что в качестве ФСО метрического пространства можно взять такую систему окрестностей, что локально в каждой точке $x \in X$ ФСО состоит из окрестностей

$$V_{x,n} = \left\{ y \in X : \ d(x,y) < \frac{1}{n} \right\}.$$

База топологии.

Несмотря на относительную простоту ФСО на практике для произвольного топологического пространства задать ФСО довольно сложно. Поэтому приходим к необходимости задавать базу топологии.

Определение 7. Базой $\mathfrak{B}$ топологии τ называется такая система множеств, что

$$\mathfrak{B} \subset \tau,$$

причем для каждого $U \in \tau$ найдется такая система множеств

$$\{V_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathfrak{B}, \quad \text{что} \quad U = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha.$$

Пространства со счетной базой.

Определение 8. Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме счетности, если в каждой точке существует конечная или счетная локальная база.
Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет второй аксиоме счетности, если существует конечная или счетная база.

Метризуемое топологическое пространство (X, τ) является пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности. А пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, является пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности.

Относительная топология.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, а $A \subset X$ — это некоторое подмножество. Рассмотрим топологию на A, определенную следующим образом:

$$\tau_A = \{V \cap A : \ V \in \tau\}.$$

Такое множество A вместе с введенной топологией τ_A является топологическим пространством

$$(A, \tau_A) \subset (X, \tau).$$



Точки прикосновения и замыкание множества.

Определение 9. Точкой x прикосновения множества A называется такая точка, что для любого $U \in \tau_x$ имеем $U \cap A \neq \emptyset$.

Определение 10. Замыканием множества называется операция добавления к нему всех точек прикосновения.

Свойства замыкания.

Теорема

(i)$_2$ $A \subset \overline{A}$; *если* $A \subset B$, *то* $\overline{A} \subset \overline{B}$; $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(ii)$_2$

$$\overline{\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)} \supset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A}_\gamma, \quad \overline{\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)} \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \overline{A}_\gamma.$$

(iii)$_2$

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i$$



Доказательство теоремы-1.

Первые два свойства в $(\mathrm{i})_2$ очевидны. Рассмотрим последнее утверждение в $(\mathrm{i})_2$. Действительно, $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Докажем обратное включение. Итак, пусть $x \in \overline{\overline{A}}$, тогда

$$\overline{A} \cap V \neq \emptyset \quad \text{для всех} \quad V \in \tau_x.$$

Фиксируем некоторую точку $y \in \overline{A} \cap V$, тогда $y \in \overline{A}$ и $V \in \tau_y$. Следовательно,

$$A \cap V \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}.$$

Доказательство теоремы-2.

Докажем теперь первое свойство в $(\mathrm{ii})_2$.

$$A_\gamma \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \Rightarrow \overline{A_\gamma} \subset \overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} \Rightarrow \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma} \subset \overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma}.$$

Докажем теперь второе свойство в $(\mathrm{ii})_2$.

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subset A_\gamma \Rightarrow \overline{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} \subset \overline{A_\gamma} \Rightarrow \overline{\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma}.$$

Доказательство теоремы-3.

Докажем свойство $(\mathrm{iii})_2$. Действительно, в силу первого свойства $(\mathrm{ii})_2$ имеем

$$\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}.$$

Докажем обратное вложение. Пусть

$$x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}.$$

Предположим, что $x \notin \overline{A_i}$ для всех $i = \overline{1, n}$. Значит, найдутся такие $V_i \in \tau_x$, что

$$V_i \bigcap A_i = \emptyset \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1, n}.$$

Доказательство теоремы-4.

Пусть

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau_x$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap V = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \bigcap V \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \bigcap V_i = \emptyset.$$

Значит,

$$x \notin \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}.$$

Теорема доказана.

Два замечания.

Отметим, что в $(\mathrm{ii})_2$ нельзя заменить вложения на равенства множеств. Действительно,

$$\overline{\left(\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} x\right)} = \mathbb{R}, \quad \text{но} \quad \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \overline{x} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} x = \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}.$$

Кроме того,

$$\overline{\mathbb{Q}\bigcap\mathbb{J}} = \overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{Q}}\bigcap\overline{\mathbb{J}} = \mathbb{R}\bigcap\mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Замкнутые множества.

Определение 10. Замкнутым множеством $A \in X$ называется множество дополнительное к открытому:

$$A = X \backslash B, \quad B \in \tau.$$

Теорема

Замкнутые множества обладают следующими свойствами:

(i)$_3$ $\emptyset$ *и* X *являются замкнутыми множествами;*

(ii)$_3$ *пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством;*

(iii)$_3$ *объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.*



Замкнутое множество и замыкание множества.

Обозначим семейство всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ) через φ.

Теорема

Пусть $A \subset X$. Тогда

$(\mathrm{i})_4$ $\overline{A}$ — *замкнутое множество;*

$(\mathrm{ii})_4$ $\overline{A}$ — *есть минимальное по включению среди всех замкнутых множеств φ, содержащих A.*

Доказательство теоремы $(\mathrm{i})_4$.

Пусть $x \in X \backslash \overline{A}$. Значит,

$$x \notin \overline{A} = \overline{\overline{A}}.$$

Следовательно, найдется такое $V_x \in \tau_x$, что

$$V_x \bigcap \overline{A} = \emptyset,$$

но тогда

$$V_x \subset X \backslash \overline{A}.$$

Следовательно,

$$X \backslash \overline{A} = \bigcup_{x \in X \backslash \overline{A}} V_x \in \tau.$$

Значит, $\overline{A}$ — замкнутое множество.



Доказательство теоремы (ii)$_4$.

Пусть

$$A \subset F \in \varphi.$$

Тогда для любой точки

$$x \in X \setminus F$$

имеем

$$\tau_x \subset X \setminus F, \quad (X \setminus F) \bigcap A = \emptyset.$$

Следовательно, $x \notin \overline{A}$ и, значит,

$$\overline{A} \subset F \quad \text{для всех} \quad F \in \varphi.$$

Теорема доказана.

Внутренность множества.

Определение 11. Внутренней точкой x множества $A \subset X$ называется такая точка, что существует $U \in \tau_x$ и

$$U \subset A.$$

Определение 12. Внутренностью $\operatorname{int} A$ множества $A \subset X$ называется совокупность всех внутренних точек множества A.

Теорема

Имеет место следующее равенство:

$$\operatorname{int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}.$$

Доказательство теоремы.

Для любой точки $x \in X$ реализуется одна из возможностей: существует $U \in \tau_x$, что $U \subset \operatorname{int} A$, либо всякая окрестность $U \in \tau_x$ не содержится целиком в $\operatorname{int} A$. Значит, в последнем случае

$$U \bigcap (X \backslash A) \neq \emptyset \quad \text{для всех} \quad U \in \tau_x,$$

но тогда

$$x \in \overline{X \backslash A}.$$

Итак, множества $\operatorname{int} A$ и $\overline{X \backslash A}$ взаимно дополнительны.

Теорема доказана.

Свойства внутренностей множеств.

Теорема

(i)$_5$ $\operatorname{int} A \subset A$; *если* $A \subset B$, *то* $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$;
$\operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A$;

(ii)$_5$

$$\operatorname{int}\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \supset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int} A_\gamma, \quad \operatorname{int}\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int} A_\gamma.$$

(iii)$_5$

$$\operatorname{int}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} A_i$$



Граница множества.

Определение 13. Точка $x \in X$ называется граничной точкой множества A, если для любого $U \in \tau_x$ имеем

$$A \bigcap U \neq \emptyset, \quad X \backslash A \bigcap U \neq \emptyset.$$

При этом множество всех граничных точек множества A обозначается как

$$\partial A.$$

Лемма

Справедливо следующее представление

$$\overline{A} = \operatorname{int} A \bigcup \partial A, \quad \operatorname{int} A \bigcap \partial A = \emptyset,$$

причем ∂A — это замкнутое множество.



Всюду плотные и нигде не плотные множества.

Определение 14. Множество $A \subset X$ называется всюду плотным, если

$$\overline{A} = X.$$

Определение 15. Множество $A \subset X$ называется нигде не плотным, если

$$\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset.$$

Теорема

Для того чтобы множество $A \subset X$ было нигде не плотным, необходимо и достаточно, чтобы для любого непустого множества $U \in \tau$ нашлось непустое подмножество $V \subset U$, что

$$V \cap A = \emptyset.$$



Доказательство теоремы. Необходимость.

Докажем необходимость. Пусть $A \subset X$ и нигде не плотно и $U \in \tau$ — непустое множество, тогда

$$V = U \backslash \overline{A} \subset U, \quad V \bigcap \overline{A} = \emptyset.$$

Докажем, что $V \in \tau$. Действительно, справедливо следующее представление:

$$V = U \backslash \overline{A} = U \bigcap (X \backslash \overline{A}),$$

но $U \in \tau$, $\overline{A}$ — замкнуто и тогда $X \backslash \overline{A}$ — открыто. Стало быть, V — открыто. Теперь поскольку $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$, то $U \not\subset \overline{A}$, значит,

$$V = U \backslash \overline{A} \neq \emptyset.$$



Доказательство теоремы. Достаточность.

Предположим, что

$$\operatorname{int} \overline{A} \neq \emptyset,$$

тогда

$$U = \operatorname{int} \overline{A} \supset V \in \tau, \quad V \subset \overline{A},$$

но тогда

$$A \cap V \neq \emptyset.$$

Теорема доказана.

Лемма

Множество $A \subset X$ нигде не плотно, тогда и только тогда, когда множество $X \backslash \overline{A}$ всюду плотно.

Непрерывные отображения.

Определение 16. Отображение

$$f(x) : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

двух топологических пространств (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) называется непрерывным по Коши в точке $x \in X_1$, если для всякой окрестности U_2 точки $f(x) \in U_2$ найдется такая окрестность U_1 точки $x \in U_1$, что имеет место вложение $f(U_1) \subset U_2$.

Определение 17. Функция

$$f(y) : (Y_1, \tau_1) \to (Y_2, \tau_2)$$

называется непрерывной по Хайне в точке $y_0 \in Y_1$, если для произвольной последовательности $\{y_n\} \subset Y_1$, сходящейся в топологическом пространстве (Y_1, τ_1), соответствующая последовательность $\{f(y_n)\} \subset Y_2$ является сходящейся в топологическом пространстве (Y_2, τ_2).

Секвенциальная непрерывность.

Определение 18. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется сходящейся к точке $x_0 \in X$ в топологическом пространстве (X, τ), если для всякой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$ имеем $x_n \in U(x_0)$.

Определение 19. Отображение

$$f(x) : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

двух топологических пространств (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) называется секвенциально непрерывным в точке $x_0 \in X_1$, если для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset X_1$, сходящейся к x_0 в топологическом пространстве (X_1, τ_1), соответствующая последовательность $\{f(x_n)\} \subset X_2$ сходится к точке $f(x_0) \in X_2$ в топологическом пространстве (X_2, τ_2).

Определение 20. Говорят, что на множестве X выделен частичный порядок или что множество X частично упорядоченно, если выделено некоторое семейство пар $(x, y) \in \mathcal{P} \subset X \otimes X$, для которых пишут $x \leqslant y$, причем для порядка «$\leqslant$» выполнены следующие свойства:

(i) $x \leqslant x$;

(ii) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;

(iii) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Пример.

На плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^1$, которая, конечно, сама по себе не упорядочена, можно ввести частичный порядок следующим образом:

$$x = (x_1, x_2) \leqslant y = (y_1, y_2) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

если выполнены неравенства $x_1 \leqslant y_1$ и $x_2 \leqslant y_2$. Заметим, что при такой частичной упорядоченности имеется место следующее свойство: для всех $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ найдется третья точка $z = (z_1, z_2)$, что имеет место упорядоченность

$$x \leqslant z \quad \text{и} \quad y \leqslant z.$$



Направленности.

Определение 21. Множество A называется направленным, если на нем введена частичная упорядоченность «$\leqslant$», причем таким образом, что для любых $x, y \in \mathrm{A}$ (не обязательно различных) найдется элемент $z \in \mathrm{A}$ (не обязательно отличный от x и y) такой, что

$$x \leqslant z, \quad y \leqslant z.$$

Определение 22. Множество элементов $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, индексируемое направленным множеством A называется направленностью.

Сходимость направленностей.

Определение 23. Направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset X$ называется сходящейся к элементу $x_0 \in X$ в топологическом пространстве (X, τ), если для всякой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 найдется такой элемент $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, что для всех элементов $\alpha \in \mathrm{A}$ таких, что $\alpha_0 \leqslant \alpha$, имеем $x_\alpha \in U(x_0)$.

Теорема

Для того чтобы отображение

$$f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

было непрерывным в точке $x \in X_1$, *необходимо и достаточно, чтобы для всякой направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, *сходящейся к* x *в топологическом пространстве* (X_1, τ_1), *соответствующая направленность* $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *сходилась к точке* $f(x) \in X_2$ *в топологическом пространстве* (X_2, τ_2).

Доказательство теоремы. Необходимость.

Итак, пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x \in X_1$. Пусть V — это окрестность точки $f(x)$, тогда найдется такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$. Пусть теперь $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — это произвольная направленность, сходящаяся к x. Выберем элемент $\alpha_0 \in \mathrm{A}$ таким образом, чтобы $x_\alpha \in U$ при $\alpha_0 \leqslant \alpha$, но тогда $f(x_\alpha) \in f(U) \subset V$, т. е. направленность $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ сходится к $f(x)$.

Доказательство теоремы. Достаточность.

Докажем теперь утверждение в другую сторону. Действительно, пусть V — это окрестность точки $f(x)$. Выберем направленное множество следующим образом. Пусть $\mathfrak{U}$ — это семейство всех окрестностей точки x, частично упорядоченное следующим образом: для $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ пишем $U_1 \leqslant U_2$, если $U_2 \subset U_1$. Ясно, что $\mathfrak{U}$ с указанным порядком является направленным множеством. Предположим, что для каждого $U \in \mathfrak{U}$ найдется такая точка x_U, что $f(x_U) \notin V$. Таким образом, мы построили направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$, которая сходится к точке x. Докажем это. Действительно, пусть U_0 — это окрестность точки x (т. е. $U_0 \in \mathfrak{U}$), тогда для всякого $U \in \mathfrak{U}$ такого, что $U_0 \leqslant U$ имеем по построению $x_U \in U \subset U_0$. Но при этом по построению направленность $\{f(x_U)\}_{U \in \mathfrak{U}}$ не сходится к точке $f(x)$. Значит, наше предположение неверно, т. е. для всякой окрестности V точки $f(x)$ найдется такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$.

Хаусдорфовы топологические пространства.

Определение 24. Топологическое пространство (X, τ) называется хаусдорфовым, если для любых двух точек $x \neq y$ найдутся непересекающиеся окрестности $U(x)$ и $U(y)$, т. е. $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

Теорема

Для того чтобы топологическое пространство (X, τ) было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы всякая сходящаяся направленность имела единственный предел.

Доказательство теоремы. Необходимость-1.

Итак, пусть топологическое пространство (X, τ) является хаусдорфовым. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — это произвольная сходящаяся к точке x и к точке y направленность. Докажем, что $x = y$. Пусть нет, тогда найдутся такие окрестности $U(x)$ и $U(y)$, что $U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Поскольку направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ является сходящейся к x, то для окрестности $U(x)$ найдется такое $\alpha_1 \in \mathrm{A}$, что при всех $\alpha \in \mathrm{A}$ таких, что $\alpha_1 \leqslant \alpha$ имеем

$$x_\alpha \in U(x).$$

Аналогичным образом найдется такое $\alpha_2 \in \mathrm{A}$, что при всех $\alpha \in \mathrm{A}$ таких, что $\alpha_2 \leqslant \alpha$ имеем

$$x_\alpha \in U(y).$$



Доказательство теоремы. Необходимость-2.

Поскольку множество A является направленным, то для α_1 и α_2 найдется такое α_3, что

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_3 \quad \text{и} \quad \alpha_2 \leqslant \alpha_3.$$

Поэтому

$$x_{\alpha_3} \in U(x) \cap U(y) = \emptyset.$$

Следовательно, $x = y$.

Доказательство теоремы. Достаточность-1.

Пусть топологическое пространство (X, τ) не является хаусдорфовым. Тогда найдутся такие две его точки $x \neq y$, что любые их окрестности $U(x)$ и $U(y)$ соответственно имеют не пустое пересечение:

$$U(x) \cap U(y) \neq \emptyset.$$

Рассмотрим направленное множество $\mathcal{U}$, состоящее из пар $(U(x), U(y))$ окрестностей точек x и y частично упорядоченное следующим образом

$$\alpha_1 = (U_1(x), U_1(y)) \leqslant \alpha_2 = (U_2(x), U_2(y)),$$

если

$$U_2(x) \subset U_1(x) \quad \text{и} \quad U_2(y) \subset U_1(y).$$



Доказательство теоремы. Достаточность-2.

Ясно, что множество $\mathfrak{U}$ является направленным. Поскольку $U(x) \cap U(y) \neq \emptyset$, то можно выделить направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ как $x_U \in U(x) \cap U(y)$. Докажем, что направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к точке x. Действительно, для всякой окрестности $U_0(x)$ найдется $U(x)$ такое, что

$$x_U \in U(x) \subset U_0(x) \quad \text{при} \quad U_0 \leqslant U.$$

Значит, направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к точке x. Аналогичным образом доказывается, что направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к y.

Замкнутость в терминах направленностей.

Теорема

Для того чтобы множество E *топологического пространства* (X, τ) *было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы для всякой направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset X$, *сходящейся к* x, *имело место* $x \in E$.

Компактность.

Определение 25. Множество $K \subset X$ топологического пространства (X, τ) называется компактным, если из любого покрытия этого множества

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \tau \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \mathrm{A}$$

можно выделить конечное подпокрытие

$$K \subset \bigcup_{\alpha_i} U_{\alpha_i} \quad \text{при} \quad i = \overline{1, n}.$$

Определение 26. Направленность $\{y_\beta\}_{\beta\in\mathrm{B}}$ называется поднаправленностью направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, если существует такое отображение

$$\pi : \mathrm{B} \to \mathrm{A},$$

что $y_\beta = x_{\pi(\beta)}$, причем для каждого $\alpha_0 \in \mathrm{A}$ найдется такое $\beta_0 \in \mathrm{B}$, что

$$\alpha_0 \leqslant \pi(\beta) \quad \text{при всех} \quad \beta_0 \leqslant \beta.$$

Определение 27. Говорят, что направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ часто бывает во множестве $E \subset X$, если для всякого $\alpha \in \mathrm{A}$ найдется такой индекс $\alpha' \in \mathrm{A}$, для которого $\alpha \leqslant \alpha'$ и $x_{\alpha'} \in E$.

Предельные точки направленностей.

Определение 28. Точка $x \in X$ в топологическом пространстве (X, τ) называется предельной точкой направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, если эта направленность часто бывает в любой окрестности $U(x)$ точки x.

Дадим сначала определение предельной точки множества $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$:
точка x называется предельной точкой множества $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$, если в любой окрестности $U(x)$ точки x есть хотя бы одна точка x_α отличная от x.

Теперь определение предельной точки направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$.
точка x называется предельной точкой направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, если эта направленность часто бывает в любой окрестности $U(x)$ этой точки x.

Теорема о предельной точке направленности.

Теорема

Точка $x \in X$ *в топологическом пространстве* (X, τ) *является предельной точкой направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *тогда и только тогда, когда существует поднаправленность* $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ *направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$*, сходящаяся к точке* x*.*

Доказательство теоремы. Необходимость-1.

Итак, пусть x — есть предельная точка направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Рассмотрим базис окрестностей $\mathfrak{B}_x$ точки x. Значит, для всякой окрестности $U \in \mathfrak{B}_x$ найдется такое $\alpha \in \mathrm{A}$, что $x_\alpha \in U$. Поэтому можно ввести направленное множество B, состоящее из пар (α, U) таких, что при $\alpha \in \mathrm{A}$, $x_\alpha \in U \in \mathfrak{B}_x$. Упорядочим множество B следующим образом:

$$(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha, U), \quad \text{если} \quad \alpha_1 \leqslant \alpha \quad \text{и} \quad U_1 \supset U.$$

Ясно, что для любых пар

$$(\alpha_1, U_1),\ (\alpha_2, U_2) \in \mathrm{B}$$

найдется пара $(\alpha_3, U_3) \in \mathrm{B}$, для которой

$$(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha_3, U_3), \quad (\alpha_2, U_2) \leqslant (\alpha_3, U_3).$$



Доказательство теоремы. Необходимость-2.

Действительно, свойство, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{A}$ найдется $\alpha_3 \in \mathrm{A}$, что

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_3 \quad \text{и} \quad \alpha_2 \leqslant \alpha_3$$

следует из того, что множество A направленное (см. определение 21). Наконец, то, что для любых $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}_x$ найдется $U_3 \in \mathfrak{B}_x$, что $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ вытекает из определения базиса окрестности $\mathfrak{B}_x$. Итак, множество B пар (α, U) является направленным множеством.

Теперь мы можем определить поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$, где $\beta = (\alpha, U) \in \mathrm{B}$, как $y_{(\alpha,U)} = x_\alpha$. Проверим, что это действительно поднаправленность направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$. Действительно, это следствие того, что в данном случае отображение π имеет следующий вид (см. определение 26):

$$\pi : (\alpha, U) \to \alpha.$$



Доказательство теоремы. Необходимость-3.

Докажем теперь, что поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ сходится к точке x. Действительно, для любой окрестности $U_1(x) \in \mathfrak{B}_x$ найдется такое $\alpha_1 \in \mathrm{A}$, что $x_{\alpha_1} \in U_1(x)$. Тогда для всех (α, U) таких, что $(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha, U)$ имеем

$$x_\alpha = y_{(\alpha, U)} \in U \subset U_1.$$

Итак, построенная поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ сходится к x. Доказательство достаточности очевидно.

Теорема доказана.

Теорема о компактности.

Теорема

Топологическое пространство (X, τ) *является компактным тогда и только тогда, когда всякая направленность имеет предельную точку.*

Лекция 6. Векторные топологические пространства и их свойства

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

4 ноября 2012 г.

Линейные функционалы.

Напомним некоторые понятия линейной алгебры. Действительно, пусть $\mathfrak{L}$ — это линейное пространство над полем либо вещественных либо комплексных чисел.

Рассмотрим множество всех линейных функционалов над линейным пространством $\mathfrak{L}$. Ясно, что это множество, которое мы обозначим через

$$\mathfrak{L}^{\#},$$

также является линейным пространством над тем же полем. Введем в рассмотрение так называемые скобки двойственности. Именно,

$$\langle f, x\rangle : \mathfrak{L}^{\#} \otimes \mathfrak{L} \to \mathbb{C}^1 \quad \text{(или)} \quad \mathbb{R}^1.$$



Определение векторного топологического пространства (ВТП).

Итак, начнем со следующего определения.

Определение 1. *Векторное пространство* X *над полем комплексных чисел* $\mathbb{C}$, *на котором задана топология* τ, *называется векторным топологическим пространствам* (X, τ), *если операции сложения элементов и умножения на число являются непрерывными отображениями из* (X, τ) *в* (X, τ).

Непрерывность сложения и умножения.

Рассмотрим поподробнее это определение. Требует расшифровки непрерывность отображения

$$F_1(x, y) : (X, \tau) \otimes (X, \tau) \to (X, \tau), \tag{1}$$

задаваемого как $F_1(x, y) = x + y$, а также непрерывность отображения

$$F_2(\lambda, x) : \mathbb{C}^1 \otimes (X, \tau) \to (X, \tau), \tag{2}$$

задаваемого как $F_2(\lambda, x) = \lambda \cdot x$.

Непрерывность сложения и умножения.

Итак, непрерывность $F_1(x, y)$ означает, что для всякой окрестности V_{x+y} точки $x + y$ найдутся такие окрестности U_x и U_y, что $F_1(U_x, U_y) = U_x + U_y \subset V_{x+y}$.

Непрерывность отображения $F_2(\lambda, x)$ означает, что для любой окрестности точки $V_{\lambda x}$ найдутся такие окрестности $U_\lambda = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| < \varepsilon\}$ и U_x точек λ и x соответственно, что $F_2(U_\lambda, U_x) = \mu U_x \subset V_{\lambda \cdot x}$ при всех $\mu \in U_\lambda$.

Некоторые определения.

Определение 1. *Выпуклым множеством* E *в векторном пространстве* X *называется такое множество, что для всех пар точек* $x, y \in E$ *и для всякого* $\lambda \in [0,1]$ *имеем* $\lambda x + (1-\lambda)y \in E$.

Определение 2. *Множество* E *в векторном пространстве* X *называется уравновешенным, если для всякого* $\lambda \in \mathbb{C}$ *с* $|\lambda| \leqslant 1$ *имеем* $\lambda E \subset E$.

Определение 3. *Множество* E *в векторном топологическом пространстве* (X, τ) *называется ограниченным, если для всякой окрестности нуля* U_θ *найдется такое* $s > 0$, *что* $E \subset tU_\theta$ *при* $t > s$.

Некоторые определения.

Определение 4. *Множество* E *в векторном топологическом пространстве* (X, τ) *называется поглощающим, если для всякой точки* $x \in X$ *найдется такое* $t = t(x) > 0$, *что* $x \in t \cdot E$.

Определение 5. *Выпуклое и уравновешенное множество* E *векторного топологического пространства* (X, τ) *называется абсолютно выпуклым.*

Сопряженные к ВТП.

Определение 6. *Множество всех линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством* (X, τ) *называется сопряженным пространством и обозначается как* X^*.

Напомним, что это означает. Действительно, пусть $f \in X^{\#}$, тогда его непрерывность в точке $x \in X$ определяется следующим образом: *для всякой окрестности* $U(f(x)) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - f(x)| < \varepsilon\}$ *найдется такая окрестность* $U(x)$ *точки* $x \in X$, *что имеет место вложение* $f(U(x)) \subset U(f(x))$. *При этом линейный функционал* $f(x)$ *должен быть непрерывен в каждой точке векторного топологического пространства* (X, τ).

Полунормы.

Топологию векторного топологического пространства (X, τ) можно задавать различными способами, но нас будет интересовать один частный, но важный случай, когда топология задается при помощи *полунорм.*

Прежде всего дадим определение полунормы.

Определение 7. *Вещественная функция* $p(x) : X \to \mathbb{R}^1_+$, *определенная на векторном пространстве* X *называется полунормой, если выполнены следующие два свойства*:

(i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и всех* $x \in X$;

(ii) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ *для всех* $x, y \in X$.

Пример полунормы. Функционал Минковского.

Рассмотрим следующую вещественную функцию на линейном пространстве $\mathbb{C}^{(1)}([0,1])$:

$$p(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f^{'}(x)|.$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет всем условиям полунормы. Однако, из условия, что $p(f) = 0$ вытекает всего лишь на всего, что $f(x) = constant$.

Определение 8. *Функционалом Минковского* $p_{\mathrm{A}}(x)$ *абсолютно выпуклого и поглощающего множества* $\mathrm{A} \subset X$ *векторного топологического пространства* (X, τ) *называется следующая функция*:

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^1_+ : x \in \lambda \cdot \mathrm{A} \right\}. \tag{3}$$

Функционал Минковского — полунорма. Свойство (i).

Докажем свойство (i). Действительно, пусть $\alpha > 0$, тогда имеют место следующие соотношения

$$p_{\mathrm{A}}(\alpha x) = \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \ \alpha x \in \lambda \mathrm{A}\right\} =$$
$$= \alpha \inf\left\{\alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \alpha^{-1}\lambda \mathrm{A}\right\} = \alpha \inf\left\{\overline{\lambda} : \ \overline{\lambda} > 0, \ x \in \overline{\lambda} \mathrm{A}\right\} =$$
$$= \alpha p_{\mathrm{A}}(x).$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha < 0$. Действительно, в этом случае справедливы аналогичные соотношения в силу уравновешенности множества A

$$p_{\mathrm{A}}(\alpha x) = \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \ \alpha x \in \lambda \mathrm{A}\right\} =$$
$$= -\alpha \inf\left\{-\alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ -x \in -\alpha^{-1}\lambda \mathrm{A}\right\} =$$
$$= -\alpha \inf\left\{-\alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in -\alpha^{-1}\lambda \mathrm{A}\right\} =$$
$$= -\alpha \inf\left\{\overline{\lambda} : \ \overline{\lambda} > 0, \ x \in \overline{\lambda} \mathrm{A}\right\} = -\alpha p_{\mathrm{A}}(x).$$

Случай $\alpha = 0$ очевиден.

Функционал Минковского — полунорма. Свойство (ii)-1.

Докажем теперь справедливость свойства (ii). Действительно, имеет место следующие рассуждения. Пусть $x, y \in \mathrm{X}$, тогда выберем числа a и b следующим образом:

$$p_{\mathrm{A}}(x) < a < p_{\mathrm{A}}(x) + \varepsilon, \quad p_{\mathrm{A}}(y) < b < p_{\mathrm{A}}(y) + \varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Докажем теперь, что

$$\frac{x}{a}, \ \frac{y}{b} \in \mathrm{A}.$$

Действительно, по определению чисел a, b имеем

$$1 > p_{\mathrm{A}}\left(\frac{x}{a}\right) = \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \frac{x}{a} \in \lambda \mathrm{A}\right\},$$

значит при некотором $\lambda \in (0, 1)$ имеет место вложение

$$\frac{x}{a} \in \lambda \mathrm{A} \subset \mathrm{A}$$

в силу уравновешенностью множества A.

Функционал Минковского — полунорма. Свойство (ii)-2.

Аналогично доказывается, что

$$\frac{y}{b} \in \mathrm{A}.$$

Но множество A выпуклое поэтому оно вместе с точками

$$\frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \frac{y}{b}$$

содержит и отрезок их соединяющий, т.е., в частности, точку

$$\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b} \in \mathrm{A}. \tag{5}$$

Значит, в силу определения функционала Минковского имеем

$$p_{\mathrm{A}}(x+y) = \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x+y \in \lambda\mathrm{A}\right\},$$

откуда и из (5) получаем, что $\lambda \leqslant a+b$. Стало быть, отсюда и из (4) имеем неравенство

$$p_{\mathrm{A}}(x+y) \leqslant a+b < p_{\mathrm{A}}(x) + \varepsilon + p_{\mathrm{A}}(y) + \varepsilon.$$

Связь функционала Минковского и абсолютно выпуклых поглощающих множеств ВТП.

Теорема

Пусть $p(x)$ *— это полунорма на векторном топологическом пространстве* (X, τ), *тогда следующие множества являются абсолютно выпуклыми и поглощающими*:

$$\mathrm{A} \equiv \{x \in \mathrm{X} : \ p(x) < \alpha\} \quad \text{и} \quad \mathrm{B} \equiv \{x \in \mathrm{X} : \ p(x) \leqslant \alpha\}\,.$$

Обратно, пусть $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ *— это абсолютно выпуклое и поглощающее множество, тогда* **функционал Минковского** *этого множества, т. е.*

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda \mathrm{A}\} - \quad \text{полунорма.}$$

$$\{x : \ p_{\mathrm{A}}(x) < 1\} \subset \mathrm{A} \subset \{x : \ p_{\mathrm{A}}(x) \leqslant 1\}\,.$$

Доказательство теоремы-1.

Докажем первую часть теоремы. Действительно, рассмотрим, например, множество A. Проверим его выпуклость: пусть $x, y \in \mathrm{A}$, тогда в силу свойства (i) имеет место следующее неравенство:

$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y) < t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha.$$

Уравновешенность этого множества следует из свойства (ii). Действительно, имеем

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \leqslant p(x) < \alpha.$$

Таким образом, приходим к выводу, что A абсолютно выпуклое множество. Докажем теперь, что это множество является поглощающим. Действительно, пусть $y \in \mathrm{X}$. Введем обозначение

$$\lambda(y) \equiv \frac{p(y)}{\alpha},$$

Доказательство теоремы-2.

тогда получим, что для всех $\lambda > \lambda(y)$ имеют место неравенства

$$p(y) < \lambda\alpha, \quad p\left(\frac{y}{\lambda}\right) < \alpha,$$

значит,

$$\frac{y}{\lambda} \in \mathrm{A} \Rightarrow y \in \lambda\mathrm{A}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы для множества B.
Осталось доказать последнее утверждение теоремы.
Действительно, пусть

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda\mathrm{A}\right\} < 1,$$

значит, $x \in \lambda\mathrm{A}$ при некотором $\lambda \in (0,1)$, тогда из уравновешенности множества A получаем

$$x \in \lambda\mathrm{A} \subset \mathrm{A}.$$

Стало быть, первое вложение доказано.



Доказательство теоремы-3.

Пусть теперь $x \in \mathrm{A}$. Тогда имеем $x \in \lambda\mathrm{A}$ при некотором $\lambda \in (0,1]$. Значит,

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda\mathrm{A}\} \leqslant 1.$$

Теорема доказана.

Локально выпуклые пространства.

В связи с этим введем новое понятие *локально выпуклого пространства*. Дадим определение.

Определение 9. *Векторное топологическое пространство* (X, τ) *называется локально выпуклым, если его базис окрестностей нуля* $\mathfrak{B}_\theta$ *может быть выбран, состоящим из выпуклых множеств.*

Важным свойством локально выпуклого векторного топологического пространства есть то, что базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\theta$ может быть выбран состоящим из абсолютно выпуклых и поглощающих множеств!!!

Локально выпуклые пространства. Построение с помощью полунорм-1.

$$V(p,n) = \left\{ x : \; p(x) < \frac{1}{n} \right\} \quad \text{при} \quad p \in \mathrm{P}(X) \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (6)$$

Действительно, $\theta \in V(p,n)$, поскольку $p(\theta) = 0$. Базис топологии окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\theta$ определим как всевозможные **конечные** пересечения

$$\bigcap_{p \in \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}, \; n \in \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}} V(p,n)$$

Заметим, что построенные окрестности нуля $V(p,n)$ являются *выпуклыми множествами*, т. е.

$$tV(p,n) + (1-t)V(p,n) \subset V(p,n) \quad \text{при} \quad t \in [0,1].$$

Локально выпуклые пространства. Построение с помощью полунорм-2.

Действительно, в силу свойств (i)–(ii) полунормы имеет место неравенство

$$p(tx+(1-t)y) \leqslant tp(x)+(1-t)p(y) < \frac{t}{n}+\frac{1-t}{n} = \frac{1}{n} \quad \forall\, x, y \in V(p,n).$$

Кроме того, окрестности $V(p,n)$ являются *уравновешенными множествами*, т. е. $\alpha V(p,n) \subset V(p,n)$ при $|\alpha| \leqslant 1$. Это также следствие свойства (ii) полунормы. Действительно, имеем при $0 < |\alpha| \leqslant 1$

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) < \frac{|\alpha|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{для всех} \quad x \in V(p,n).$$



Теорема о непрерывности полунорм.

Теорема

Полунорма $p(x)$, *определенная на векторном топологическом пространстве* X, *непрерывна в топологии* τ *тогда и только тогда, когда она непрерывна в нуле. Функционал Минковского* $p_U(x)$ *абсолютно выпуклого, поглощающего множества* $U \in X$ *является непрерывным в топологии* τ *тогда и только тогда, когда* U *— окрестность нуля.*

Доказательство теоремы-1.

Докажем первую часть теоремы. Пусть $p(x)$ непрерывна в нуле векторного топологического пространства (X, τ), тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $U_\varepsilon \in \tau$, что $\theta \in U_\varepsilon$ и имеет место неравенство

$$p(x) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in U_\varepsilon \backslash \{\theta\}.$$

В силу неравенства треугольника (ii) в определении полунормы для произвольного $a \in \mathrm{X}$ имеем неравенство

$$|p(x) - p(a)| \leqslant p(x - a).$$

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ взяв указанное U_ε, получим неравенство

$$|p(x) - p(a)| \leqslant p(x - a) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in a + U_\varepsilon \backslash \{\theta\},$$

т. е. $p(x)$ непрерывна в произвольной точке $a \in X$.



Доказательство теоремы-2.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Пусть $U \in X$ — абсолютно выпуклая, поглощающая окрестность нуля. Рассмотрим соответствующий функционал Минковского

$$p_U(x) \equiv \inf \{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda U\}.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ при $x \in \varepsilon U \equiv U_\varepsilon$ имеем $\lambda \leqslant \varepsilon$ и, значит,

$$p_U(x) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in U_\varepsilon \backslash \{\theta\},$$

т. е. функционал Минковского $p_U(x)$ непрерывен в нуле и из предыдущего утверждения — на всем X.

Доказательство теоремы-3.

Докажем обратное утверждение. Действительно, пусть функционал Минковского абсолютно выпуклого, поглощающего множества $U \in \mathrm{X}$ непрерывен в нуле, тогда множество

$$V \equiv \{x : \; p_U(x) < 1\}$$

открыто (т. е. принадлежит τ) как прообраз открытого множества $(0, 1)$ и содержит $\theta \in \mathrm{X}$, и содержится во множестве U. Значит, U — окрестность нуля.

Теорема доказана.

Одно утверждение.

Имеет место следующее важное утверждение, вытекающее из этой теоремы и которое мы приведем без доказательств.

Лемма

Пусть $p(x)$ *— это полунорма, определенная на векторном топологическом пространстве* (X, τ) *, тогда если множество* $\mathrm{A}_p \equiv \{x : \; p(x) < 1\}$ *содержит открытое множество* $\Theta \in \tau$ *либо множество* $\mathrm{B}_p \equiv \{x : \; p(x) \leqslant 1\}$ *содержит открытое множество* $\Theta \in \tau$*, то* $p(x)$ *непрерывна в топологии* τ.

Непрерывность полунорм в локально выпуклых пространствах.

Теорема

Полунорма $p(x)$*, определенная на векторном топологическом пространстве* (X, τ) *, непрерывна в топологии* τ*, порожденной счетным семейством полунорм* P*, тогда и только тогда, когда найдутся такие конечное семейство полунорм* $p_i(x)$ *из* P *при* $i = \overline{1, n}$ *и постоянная* $\beta > 0$*, что имеет место следующее неравенство:*

$$p(x) \leqslant \beta \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x). \quad (7)$$

Доказательство теоремы-1.

Докажем сначала достаточность условия (7). Пусть для полунормы $p(x)$ выполнено неравенство (7) при некотором конечном семействе полунорм $\{p_i(x)\} \subset \mathrm{P}$. Поскольку топология τ порождена счетным семейством полунорм P, то множества

$$\{x : \ p_i(x) < 1\} \in \tau \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1, n},$$

т. е. открыты, значит, в силу леммы 1 полунормы $p_i(x)$ непрерывны в топологии τ. Из неравенства (7) вытекает непрерывность полунормы $p(x)$ в нуле и, следовательно, — на всем пространстве X.

Доказательство теоремы-2.

Докажем теперь необходимость условия (7). Пусть $p(x)$ непрерывна в нуле пространства X. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$ и конечный набор полунорм $\{p_i(x)\} \subset \mathrm{P}$, что для всех x из X, удовлетворяющих условию

$$\max_{i=\overline{1,n}} p_i(x) \leqslant \delta$$

выполняется неравенство

$$p(x) \leqslant \varepsilon.$$

Выберем теперь число $\lambda > 0$ таким образом, чтобы

$$\lambda \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x) \leqslant \delta,$$

тогда

$$\max_{i=\overline{1,n}} p_i(\lambda x) \leqslant \delta.$$

Доказательство теоремы-3.

Следовательно, имеет место неравенство

$$p(\lambda x) \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

Выберем теперь постоянную λ как

$$\lambda = \frac{\delta}{\max\limits_{i=\overline{1,n}} p_i(x)}.$$

Тогда из неравенства (8) вытекает неравенство

$$p(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x).$$

Теорема доказана.

База топологии ВТП.

Теорема

Базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\theta$ *(напоминаем, что это базис, построенный с помощью полунорм) на векторном пространстве* X *порождает локально выпуклое векторное топологическое пространство* (X, τ) .

Доказательство теоремы.

Действительно, топология τ порождается единственным образом как все возможные сдвиги базы окрестностей нуля:

$$\left\{ x + V \middle| V \in \mathfrak{B}_\theta \right\}.$$

Именно, будем считать, что $U \in \tau$, если U можно представить в виде объединения сдвигов некоторых множеств из $\mathfrak{B}_\theta$.
Очевидно, что так определенная топология τ инвариантна относительно сдвигов.
Можно доказать непрерывность сложения векторов и непрерывность умножения числа на вектор относительно введенной топологии.
Построенная топология является локально выпуклой в силу утверждения теоремы 1.

Теорема доказана.



Рецепт построения локально выпуклого ВТП.

Таким образом, мы нашли рецепт построения из линейного пространства X локально выпуклого векторного топологического пространства, который мы и будем использовать при построении пространств *основных функций*. Заметим, что векторное топологическое пространство при нашем его определении не является автоматически хаусдорфовым. Поэтому в дальнейшем мы будем строить только хаусдорфовы топологии. Заметим теперь, что, как мы уже говорили, из условия $p(x) = 0$ вовсе не вытекает, что $x = \theta$, однако есть одно свойство системы полунорм P, которое роднит семейство полунорм с нормой. Именно, относительно системы полунорм P мы будем требовать, чтобы она была *разделяющей*, т. е. для всякой точки $x \in X$ существует такая полунорма $p \in \mathrm{P}$, что $p(x) \neq 0$.

Теорема о метризации.

Теорема

Пусть $\mathrm{P}(X)$ *— есть счетное и разделяющее семейство полунорм, тогда построенное по этой системе полунорм локально выпуклое векторное топологическое пространство является метризуемым пространством.*

Предположим теперь, что наше семейство полунорм $\mathrm{P}(X)$ счетно и разделяющее. Тогда на построенном топологическом пространстве (X, τ) можно ввести метрику

$$d(x,y) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}. \qquad (9)$$

Проверим, что это метрика на (X, τ). Действительно, в силу того, что семейство полунорм является разделяющим, то $d(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, поскольку, если $d(x,y) = 0$, но $x - y \neq \theta$, то найдется такой номер $k = n_0$, что $d_{n_0}(x-y) > 0$, а значит, $d(x,y) > 0$. Противоречие.

Теорема доказана.

Пространства Фреше.

Определение 10. *Полное, метризуемое и локально выпуклое пространство называется пространством Фреше.*

Замечание 2. Как видно из теоремы 5 — она не гарантирует того, что построенное по данной системе полунорм метрическое пространство является автоматически полным, т. е. пространством Фреше. Действительно, это не так и полноту построенного пространства надо проверять «вручную».

Основные типы топологий. Слабая топология-1.

Итак, пусть $f \in X^{\#}$, а $x \in X$, причем X — это векторное пространство. Теперь рассмотрим следующую функцию на $x \in X$:

$$p(x) = |\langle f, x \rangle| \quad \text{для всех} \quad x \in X \quad \text{при} \quad f \in X^{\#}. \tag{10}$$

Докажем, что функция $p(x)$ — это полунорма. Действительно, имеют место следующие очевидные неравенства:

$$p(x_1 + x_2) = |\langle f, x_1 + x_2 \rangle| = |\langle f, x_1 \rangle + \langle f, x_2 \rangle| \leqslant \\ \leqslant |\langle f, x_1 \rangle| + |\langle f, x_2 \rangle| = p(x_1) + p(x_2), \tag{11}$$

$$p(\lambda x) = |\langle f, \lambda x \rangle| = |\lambda \langle f, x \rangle| = |\lambda| \, |\langle f, x \rangle| = |\lambda| p(x). \tag{12}$$



Основные типы топологий. Слабая топология-2.

Таким образом, в силу (11) и (12) функция (10) является полунормой. Пока у нас нет топологии в векторном пространстве $X^{\#}$, поэтому мы не можем сказать, что такое ограниченное множество в $X^{\#}$. Мы можем говорить только о конечных множествах из $X^{\#}$, т. е. о множествах, состоящих из конечного числа элементов из $X^{\#}$. Таким образом, будем рассматривать произвольные конечные множества $A_n = \{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset X^{\#}$. Тогда семейство

$$\mathrm{P} \equiv \left\{ p(x; A_n); A_n \subset X^{\#} \right\}, \tag{13}$$

где

$$p(x; A_n) = \sup_{f \in A_n} |\langle f, x \rangle| .$$



Основные типы топологий. Слабая топология-3.

Это семейство согласно теореме 4 порождает топологию τ_w на векторном пространстве X, которая называется *слабой топологией.* Заметим теперь, что выражение, которое стоит в левой части равенства (10) можно рассматривать как функцию от аргумента $f \in X^{\#}$ при фиксированном $x \in X$. Но тогда эта функция тоже полунорма, но уже на линейном пространстве $X^{\#}$.

Основные типы топологий. $*-$Слабая топология-1.

Теперь введем следующее семейство полунорм:

$$\mathrm{P}^{\#} \equiv \{p(f; B_n); B_n \subset X\}, \tag{14}$$

где

$$p(f; B_n) = \sup_{x \in B_n} |\langle f, x \rangle|, \quad B_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X.$$

Это семейство согласно теореме 4 порождает топологию $\tau^*_{w^*}$, но уже на сопряженном векторном пространстве $X^{\#}$. Эта топология носит название $*-$*слабой топологии.*

Основные типы топологий. Сравнение топологий-1.

Возникает вопрос: почему мы в данном случае говорим не о слабой топологии, а о $*-$слабой топологии? А вот почему — потому что на векторном пространстве $X^{\#}$ может быть еще задана и слабая топология следующим образом. Поскольку множество $X^{\#}$ является векторным пространством, то на нем в свою очередь однозначно определено векторное пространство $X^{\#\#}$ линейных функционалов, но уже над $X^{\#}$. Определим соответствующие скобки двойственности между $X^{\#}$ и $X^{\#\#}$ следующим образом:

$$\left\langle x^{\#}, f \right\rangle_{\#} : X^{\#\#} \otimes X^{\#} \to \mathbb{C}. \tag{15}$$

Основные типы топологий. Сравнение топологий-2.

Но тогда рассмотрим топологию на $X^{\#}$ при помощи следующего семейства полунорм:

$$\mathrm{P}^{\#\#} \equiv \left\{ p^{\#}(f; A_n^{\#}); A_n^{\#} \subset X^{\#\#} \right\}, \tag{16}$$

где

$$p^{\#}(f; A_n^{\#}) = \sup_{x^{\#} \in A_n^{\#}} \left| \langle x^{\#}, f \rangle_{\#} \right|,$$

где $A_n^{\#}$ — это произвольное конечное подмножество из $X^{\#\#}$. Порожденная согласно теореме 3 топология τ_w^* является по своему смыслу слабой топологией на $X^{\#}$ и эти две топологии τ_w^* и $\tau_{w^*}^*$ вообще говоря не совпадают.

Основные типы топологий. Сравнение топологий-3.

Рассмотрим вопрос о том, когда эти две топологии являются эквивалентными. Заметим, что имеет место множественное вложение $X \subset X^{\#\#}$. Действительно, это следствие того, что каждый элемент $x \in X$ порождает линейный функционал на $X^{\#}$ по формуле

$$\langle f, x \rangle.$$

Поэтому и имеет место указанное вложение, но обратное вложение — $X^{\#\#} \subset X$ имеет место не всегда. Однако тот случай, когда все-таки такое вложение имеет место, а значит $X = X^{\#\#}$, очень важен. В этом случае линейное пространство X называется *рефлексивным*.

Основные типы топологий. Сравнение топологий-4.

И в этом случае имеет место равенство скобок двойственности

$$\langle f, x\rangle = \langle x^{\#}, f\rangle_{\#},$$

причем каждому элементу $x \in X$ взаимно однозначно соответствует элемент $x^{\#} \in X^{\#\#}$. Поэтому из сравнения формул (17) и (16) мы приходим к выводу о том, что топологии τ_w и τ_w^* совпадают на $X^{\#}$ и, значит, понятия слабой топологии и $*-$слабой топологии — это одно и тоже. В общем случае, как нетрудно убедиться, топология τ_w^* состоит из большего числа множеств, чем топология $\tau_{w^*}^*$ и, значит, топология τ_w^* *сильнее* топологии $\tau_{w^*}^*$ на $X^{\#}$.

Основные типы топологий. Сильная топология-1.

Теперь мы займемся введением *сильной топологии* на пространстве X^* — линейном пространстве линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством (X, τ). Заметим, что для введения сильной топологии на X^* нам нужно понятие ограниченного множества в X и поэтому, естественно, нужна какая-то топология на векторном пространстве X.

Основные типы топологий. Сильная топология-2.

Пусть $B \subset X$ — это произвольное ограниченное множество (см. определение 3) в векторном топологическом пространстве (X, τ). Поскольку всякое конечное множество, в частности, точка поглощается всякой окрестностью нуля, то конечное множество — это пример ограниченного множества, однако, естественно, существуют ограниченные множества, не сводящиеся к конечным. Теперь введем следующее семейство полунорм:

$$\mathrm{P}_s^{\#} \equiv \{p(f; B); B \subset X\}, \tag{17}$$

где

$$p(f; B) = \sup_{x \in B} |\langle f, x \rangle|, \quad B \subset X,$$

где B — это произвольное ограниченное множество в (X, τ).

Тогда топология порожденная этой системой множеств согласно теореме 4, называется *сильной топологией* пространства X^* и обозначается как τ_s^*. Ясно, что поскольку всякое конечное множество — это ограниченное множество, то слабая топология τ_w^* и уж тем более $*-$слабая топология пространства X^* *слабее* топологии τ_s^*. Таким образом, сильная топология τ_s является *сильнейшей* топологией на сопряженном пространстве X^* среди указанных «топологизаций». Полученное локально выпуклое векторное топологическое пространство обозначается как (X_s^*, τ_s^*). Локально выпуклое векторное топологическое пространство, порожденное $*-$слабой топологией, обозначается как (X_{w*}^*, τ_{w*}^*).

Нормируемые векторные топологические пространства.

Определение 11. *Векторное топологическое пространство* (X, τ) *называется нормируемым, если на нем можно ввести такую норму, что топология нормы и исходная топология* τ *являются эквивалентными.*

Теорема о нормируемости. *Локально выпуклое пространство, содержащее ограниченную и компактную окрестность нуля, является банаховым относительно функционала Минковского этой окрестности с топологией, эквивалентной исходной.*

Доказательство теоремы-1.

Приведем доказательство только первой части этого утверждения.
Пусть V — есть выпуклая ограниченная окрестность нуля в локально выпуклом векторном топологическом пространстве (X, τ). Тогда как известно найдется открытая в топологии τ абсолютно выпуклая, окрестность нуля $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, которая, естественно, тоже ограничена. Тогда это пространство можно представить в виде

$$X = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha \mathrm{U}.$$

Доказательство теоремы-2.

Рассмотрим функционал Минковского множества U :

$$p_{\mathrm{U}} \equiv \inf \{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda \mathrm{U}\} .$$

Поскольку U есть выпуклое, поглощающее и уравновешенное множество (как окрестность нуля), то по теореме 1 функционал Минковского этого множества является полунормой на этом пространстве. Пусть $x \neq \theta$ и $x \notin \lambda_0 \mathrm{U}$ при $\lambda_0 > 0$ то для всех $\lambda \leqslant \lambda_0$ в силу ограниченности U имеем $x \notin \lambda \mathrm{U} \subset \lambda_0 \mathrm{U}$. Тогда по определению функционала Минковского имеем

$$p_{\mathrm{U}}(x) \geqslant \lambda_0 > 0.$$



Доказательство теоремы-3.

Таким образом, $p_{\mathrm{U}}(x)$ есть норма на (X, τ). Осталось доказать, что $p_{\mathrm{U}}(x)$ порождает ту же топологию на X, что и исходная топология τ. Это есть следствие ранее установленного нами равенства множеств

$$\alpha \mathrm{U} = \{x \in \mathrm{X} : \; p_{\mathrm{U}}(x) < \alpha\} .$$

Теорема доказана.

Определение 12. *Локально выпуклое пространство* (X, τ) *называется борнологическим или пространством Макки, если каждое абсолютно выпуклое множество, поглощающее все ограниченные множества является окрестностью нуля.*

Борнологическое пространство обладает целым набором интересных свойств, доказательство которых выходит за рамки целей настоящего курса лекций.

Борнологические пространства. Свойства.

Теорема

Для того чтобы локально выпуклое пространство (X, τ) *было борнологическим, необходимо и достаточно, чтобы каждая полунорма* $p(x)$ *на* (X, τ), *ограниченная на каждом ограниченном множестве, была непрерывной.*

Теорема

Локально выпуклое метризуемое пространство (X, τ) *является борнологическим.*

Теперь мы приведем самый важный в приложениях результат. Пусть $\mathbb{T}$ — это линейное отображение борнологического пространства (X, τ) в борнологическое пространство (Y, σ).

Теорема

Для того чтобы оператор $\mathbb{T}$ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы из условия $x_n \to \theta$ в (X, τ) вытекало, что $\mathbb{T}x_n \to \theta$ в (Y, σ).

Строгие индуктивные пределы и полнота. Понятие.

В дальнейшем мы будем рассматривать следующую общую ситуацию — имеется счетное семейство локально выпуклых векторных топологических пространств (X_n, τ_n) таких, что

$$(X_n, \tau_n) \subset (X_{n+1}, \tau_{n+1})$$

и топология τ_{n+1} порождает на X_n исходную топологию τ_n. Оказывается, что индуктивная топология τ на

$$X \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n,$$

порожденная семейством (X_n, τ_n) относительно операторов канонического вложения

$$g_n : X_n \to X,$$

порождает на каждом (X_n, τ_n) исходную топологию τ_n.

Полнота.

Определение 13. *Фундаментальной направленностью или направленностью Коши называется такая направленность* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, *что для всякой окрестности нуля* U *найдется такое* $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, *что для всех таких* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{A}$, *для которых* $\alpha_0 \leqslant \alpha_1$ *и* $\alpha_0 \leqslant \alpha_2$ *имеет место выражение*

$$x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in U.$$

Определение 14. *Векторное топологическое пространство* (X, τ) *называется полным, если всякая фундаментальная направленность сходится.*

Строгие индуктивные пределы и полнота. Свойства.

Теорема

Справедливы следующие свойства строгих индуктивных пределов:

(i) *Строгий индуктивный предел полных локально выпуклых пространств полон;*

(ii) *Пусть* (X, τ) *есть строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств* (X_n, τ_n). *Множество* $\mathrm{B} \subset \mathrm{X}$ *ограничено в* (X, τ) *тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором* (X_n, τ_n) *и ограничено в нем.*

(iii) *Пусть* (X, τ) *есть строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств* (X_n, τ_n), *причем* (X_n, τ_n) *замкнуто в* $(\mathrm{X}_{n+1}, \tau_{n+1})$. *Тогда* (X, τ) *не метризуемо.*

(iv) *Строгий индуктивный предел* (X, τ) *борнологических пространств есть борнологическое пространство.*

Плотные вложения локально выпуклых пространств. Постановка вопроса.

Пусть, к примеру, (X, τ) и (Y, σ) — это локально выпуклые пространства с сильными сопряженными (X_s^*, τ_s^*) и (Y_s^*, σ_s^*). Предположим, что имеет место следующее топологическое вложение:

$$(X, \tau) \subset (Y, \sigma) \,.$$

При каких дополнительных условиях на эти пространства имеет место следующее обратное вложение сильных сопряженных:

$$(Y_s^*, \sigma_s^*) \subset (X_s^*, \tau_s^*)?$$



Плотные вложения локально выпуклых пространств. Постановка вопроса.

Итак, пусть (X, τ) и (Y, σ) — это локально выпуклые пространства с сильными сопряженными (X_s^*, τ_s^*) и (Y_s^*, σ_s^*). Пусть

$$\langle x^*, x \rangle_x \quad \text{и} \quad \langle y^*, y \rangle_y$$

— это скобки двойственностей между (X, τ) и (X_s^*, τ_s^*), и (Y, σ) и (Y_s^*, σ_s^*), соответственно. Пусть, кроме того, имеется линейный оператор $\mathbb{T}$, действующий из (X, τ) в (Y, σ):

$$\mathbb{T} : (X, \tau) \to (Y, \sigma) .$$

Плотные вложения локально выпуклых пространств. Транспонированный оператор.

Напомним, определение транспонированного оператора $\mathbb{T}^t$:

$$\mathbb{T}^t : (\mathrm{Y}^*_s, \sigma^*_s) \to (\mathrm{X}^*_s, \tau^*_s) \,,$$

т. е.

$$\left\langle \mathbb{T}^t y^*, x \right\rangle_x \equiv \langle y^*, \mathbb{T}x \rangle_y \,, \tag{18}$$

для всех $y^* \in (Y^*, \sigma^*_s)$ и для всех $x \in (X, \tau)$.

Плотные вложения локально выпуклых пространств. Теорема.

Теорема

Пусть (X, τ) *и* (Y, σ) *— это два локально выпуклых пространства и*

$$\mathbb{T} : (\mathrm{X}, \tau) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$$

— это линейный непрерывный оператор. Тогда имеют место следующие утверждения

(i) $\mathbb{T}(X) \overset{ds}{\subset} Y \Leftrightarrow \mathbb{T}^t$ *— является инъективным;*

(ii) $\mathbb{T}^t(Y_s^*) \overset{ds}{\subset} X_s^* \Rightarrow \mathbb{T}$ *— является инъективным.*

Теперь достаточно применить общий результат теоремы 11 к важному частному случаю оператора инъективного и непрерывного вложения

$$\mathbb{J}_{xy} : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$$

и транспонированного оператора

$$\mathbb{J}^t_{xy} : (Y^*_s, \sigma^*_s) \to (X^*_s, \tau^*_s) \,.$$

Плотные вложения локально выпуклых пространств. Теорема.

И, тем самым, получить следующий весьма полезный результат в приложениях к изучению слабых решений краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных.

Теорема

Пусть (X, τ) *и* (Y, σ) *— это два локально выпуклых пространства и* $(X, \tau) \subset (Y, \sigma)$*. Тогда имеют место следующие утверждения*

(i) $(X, \tau) \overset{ds}{\subset} (Y, \sigma) \Leftrightarrow \mathbb{J}^t_{ef}$ *является инъективным;*

(ii) $(Y^*_s, \sigma^*_s) \overset{ds}{\subset} (X^*_s, \tau^*_s) \Rightarrow \mathbb{J}_{ef}$ *является инъективным.*

Плотные вложения локально выпуклых пространств. Следствие.

Следствие. *Для локально выпуклого пространства* (X, τ) *из условия* $(X, \tau) \overset{ds}{\subset} (Y, \sigma)$ *вытекает свойство* $(Y_s^*, \sigma_s^*) \overset{ds}{\subset} (X_s^*, \tau_s^*)$. *И, таким образом, имеют место равенства скобок двойственности*

$$\langle f, x \rangle_x = \langle f, x \rangle_y \quad \text{для всех} \quad x \in X, \quad f \in Y_s^*.$$

Лекция 7. Банаховы пространства

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

17 декабря 2012 г.

Определение.

Определение 1. Банаховым пространством $\mathbb{B}$ называется нормированное пространство, которое является полным как метрическое пространство относительно метрики

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

где $\|\cdot\|$ — это норма данного нормированного пространства.

Вопрос: является ли всякое нормированное пространство линейным пространством?

Примеры.

Прежде всего, пространством Лебега $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ при $\in [1, +\infty)$ является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Пространство l^p при $p \in [1, +\infty)$ является банаховым относительно нормы

$$\|\{x\}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Эквивалентные нормы на банаховом пространстве.

Определение 2. Норма $\|\cdot\|_1$ на банаховом пространстве $\mathbb{B}, \|\cdot\|$ называется эквивалентной исходной, если найдутся такие положительные числа c_1 и c_2, что имеет место неравенство

$$c_1\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant c_2\|f\| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}.$$

Очевидно, что $c_1 \leqslant c_2$.

Заметим, что при этом соответствующее линейное нормированное пространство $\mathbb{B}$ будет тоже банаховым относительно эквивалентной нормы $\|\cdot\|_1$.

Пример.

Рассмотрим банахово пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно стандартной нормы

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Теперь рассмотрим новую норму

$$\|f\|_1 = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Докажем, что это эквивалентная норма.
□ Имеет место цепочка неравенств

$$\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant 2\|f\|.$$

Стало быть, нормированное относительно нормы $\|\cdot\|_1$ линейное пространство $\mathbb{C}[0,1]$ является также банаховым.

Неэквивалентные нормы. Пример.

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$, на котором введем следующую норму:

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f^{'}(x)|.$$

Относительно этой нормы линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ является банаховым.

Рассмотрим на этом же линейном пространстве другую норму

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Относительно, этой нормы рассматриваемое линейное пространство не является банаховым. Если применить процедуру пополнения, то его пополнением окажется банахово пространство $\mathbb{C}[0,1]$.

Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах.

Пусть $(\mathbb{N}_1, \|\cdot\|_1)$ и $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$ — это два нормированных пространства, причем

$$A : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$$

это линейный непрерывный оператор. Все такие операторы образуют линейное пространство (с очевидными операциями сложения и умножения на число), которое мы обозначим через

$$\mathcal{L}(N_1, N_2).$$

Введем норму на $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ следующим образом:

$$\|A\| \equiv \sup_{x \neq \theta,\, x \in \mathbb{N}_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}.$$

Проверим, что это норма — на доске!



Эквивалентное определение нормы линейного оператора.

Заметим, что в силу свойств нормы имеет место следующая цепочка равенств:

$$\|A\| \equiv \sup_{x\neq\theta,\, x\in\mathbb{N}_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{x\neq\theta,\, x\in\mathbb{N}_1} \left\| A\frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 = \sup_{\|y\|_1=1} \|Ay\|_2.$$

Возникает вопрос о том, при каких условиях линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ является банаховым относительно введенной операторной нормы?

Теорема

Пусть $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$ *является банаховым пространством, тогда* $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ *банахово.*

Доказательство теоремы-1.

Пусть $\{A_n\}$ — это фундаментальная по операторной норме последовательность операторов, т. е.

$$\|A_n - A_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

Докажем, что существует

$$A \in \mathcal{L}(N_1, N_2),$$

такой что

$$\|A_n - A\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Для всякого $x \in \mathbb{N}_1$ последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна в банаховом пространстве $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$. Действительно,

$$\|A_n x - A_m x\|_2 \leqslant \|A_n - A_m\| \|x\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

Доказательство теоремы-2.

В силу полноты $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$ имеем

$$A_n x \to y \quad \text{в} \quad (\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2).$$

Введем оператор

$$Ax = y.$$

Докажем его линейность.

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2$$

причем

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \to A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

и

$$A_n x_1 \to A x_1 \quad \text{и} \quad A_n x_2 \to A x_2.$$

Значит,

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2.$$



Доказательство теоремы-3.

Докажем теперь ограниченность оператора A.

$$\left|\|A_n\| - \|A_m\|\right| \leqslant \|A_n - A_m\|.$$

Итак, из фундаментальности $\{A_n\}$ вытекает фундаментальность $\{\|A_n\|\}$. Значит,

$$\|A_n\| \to c_1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак,

$$\|Ax\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \|A_n x\|_2 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \|A_n\| \|x\|_1 = c_1 \|x\|_1.$$

Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_2 \leqslant c_1.$$

Доказательство теоремы-4.

Нам осталось доказать, что

$$\|A - A_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Действительно,

$$\|(A - A_n)x\|_2 = \lim_{m\to+\infty} \|(A_m - A_n)x\|_2 \leqslant \lim_{m\to+\infty} \|A_m - A_n\|.$$

Следовательно,

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|(A - A_n)x\|_2 \leqslant \lim_{m\to+\infty} \|A_m - A_n\|,$$

а в силу фундаментальности $\{A_n\}$ правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой при больших n.

Теорема доказана.



Линейные функционалы.

Прежде всего будем называть сходимость по норме

$$\|x - x_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

сильной сходимостью.

Рассмотрим частный, но очень важный случай линейных операторов — линейные функционалы:

$$f : (\mathbb{B}, \|\cdot\|) \to \mathbb{C},$$

причем

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{B}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.



Сопряженное пространство.

Прежде всего вместо обозначения действия линейного функционала $f(\cdot)$ на элементе $x \in \mathbb{B}$ будем обозначать как

$$\langle f, x \rangle \quad \text{вместо} \quad f(x).$$

Очевидно, что множество линейных функционалов — само линейное пространство.

Определение 3. Множество всех линейных функционалов над банаховым пространством $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ непрерывных в том смысле, что

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

для всех

$$x_n \to x \quad \text{сильно в} \quad (\mathbb{B}, \|\cdot\|),$$

будем обозначать через $\mathbb{B}^*$.



Норма на сопряженном пространстве.

Поскольку линейные функционалы — это линейные операторы, действующие из $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ в $\mathbb{C}$, а

$$\mathbb{C} \quad \text{полное банахово пространство!},$$

то в силу доказанной теоремы пространство $\mathbb{B}^*$ является банаховым относительно следующей операторной нормы:

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x \rangle| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Заметим, что сходимость последовательности $\{f_n\}$ по этой норме

$$\|f - f_n\|_* \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

является в наших обозначениях СИЛЬНОЙ сходимостью!!!



Слабая и $*$-слабая сходимость.

Если есть сильная сходимость в банаховом пространстве $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, то должна существовать и слабая сходимость.

Определение 4. Слабой сходимостью последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{B}$ называется сходимость числовой последовательности

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \text{для каждого фиксированного} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Более того, на $\mathbb{B}^*$ можно ввести еще одну сходимость — $*-$слабую сходимость.

Определение 5. $*-$Слабой сходимостью последовательности $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ называется сходимость следующей числовой последовательности

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle \quad \text{для каждого фиксированного} \quad x \in \mathbb{B}.$$

Обозначение.

Сильную сходимость мы будем обозначать как

$$x_n \to x.$$

Слабую сходимость будем обозначать как

$$x_n \rightharpoonup x.$$

$*-$Слабую сходимость будем обозначать как

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f.$$

Примеры. Пространства Лебега.

Теперь мы проиллюстрируем введенные в этой лекции новые понятия на примере пространств Лебега. Дадим определения сильной, слабой и $*-$слабой сходимостей для пространств $L^p(\Omega)$, где Ω область эвклидова пространства $\mathbb{R}^N$, а $p \in [1, +\infty]$.

Сильная сходимость и слабая сходимость.

Определение 6. *Последовательность* $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ *называется сильно сходящейся к элементу* $u \in L^p(\Omega)$ *при* $p \in [1, +\infty]$, *если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n - u\|_p = 0.$$

Определение 7. *Последовательность* $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ *называется слабо сходящейся к элементу* $u \in L^p(\Omega)$ *при* $p \in [1, +\infty)$, *если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n \to +\infty} \langle f, u_n \rangle_p = \langle f, u \rangle_p \quad \text{для всех} \quad f \in (L^p(\Omega))^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $L^p(\Omega)$ *и* $(L^p(\Omega))^*$ *при* $p \in [1, +\infty)$.

$*-$Слабая сходимость.

Определение 8. *Последовательность* $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ *называется* $*-$*слабо сходящейся к функции* $f \in L^\infty(\Omega)$, *если для всех* $u \in L^1(\Omega)$ *имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_n \langle f_n, u\rangle_\infty = \langle f, u\rangle_\infty \quad \text{для всех} \quad u \in L^1(\Omega),$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $L^\infty(\Omega)$ *и* $L^1(\Omega)$.

Теорема

Банахово пространство $(L^p(\Omega))^*$ *при* $p \in (1, +\infty)$ *совпадает с банаховым пространством* $L^q(\Omega)$ *при* $q = p/(p-1)$, *а в случае* $p = 1$ *банахово пространство* $\left(L^1(\Omega)\right)^*$ *совпадает с пространством* $L^\infty(\Omega)$.

Дважды сопряженные пространства.

Итак, мы ранее построили сопряженное банахово пространство $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$. Рассмотрим теперь линейное пространство всех линейных функционалов над этим банаховым пространством.

$$\langle x^{**}, f\rangle_* \quad \text{для всех} \quad x^{**} \in (\mathbb{B}^*)^*, \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Определение 9. Линейное пространство всех линейных функционалов x^{**} над банаховым пространством $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$ непрерывных в том смысле, что

$$\langle x^{**}, f_n\rangle_* \to \langle x^{**}, f\rangle_*$$

как только

$$\|f_n - f\|_* \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

будем называть дважды сопряженным и обозначать как $\mathbb{B}^{**}$.

Норма дважды сопряженного пространства.

Поскольку каждый элемент $x^{**} \in \mathbb{B}^{**}$ — это линейный и непрерывный оператор, действующий как

$$x^{**} : (\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*) \to \mathbb{C},$$

то как и ранее приходим к выводу, что $\mathbb{B}^{**}$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x^{**}\|_{**} \equiv \sup_{\|f\|_*=1} |\langle x^{**}, f\rangle_*| .$$

Сходимость последовательности $\{x_n^{**}\} \subset \mathbb{B}^{**}$ по введенной норме

$$\|x_n^{**} - x^{**}\|_{**} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

в наших обозначениях является сильной сходимостью.



Слабая сходимость в $\mathbb{B}^*$.

Разумеется, что после того как мы ввели в рассмотрение банахово пространство $(\mathbb{B}^{**}, \|\cdot\|_{**})$ мы можем ввести на банаховом пространстве $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$ обычную слабую сходимость.

Определение 10. Сходимость числовой последовательности

$$\langle x^{**}, f_n\rangle_* \to \langle x^{**}, f\rangle \quad \text{для каждого} \quad x^{**} \in \mathbb{B}^{**}.$$

будем называть слабой сходимостью

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Слабая и $*-$слабая сходимости на банаховом пространстве $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$.

Таким образом, мы построили три типа сходимостей на банаховом пространстве

$$(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*),$$

которое является сопряженным к исходному банахову пространству

$$(\mathbb{B}, \|\cdot\|).$$

Вопрос как они связаны.

Сильная сходимость влечет за собой слабую, а слабая сходимость влечет за собой $*-$слабую.

Рефлексивность.

Заметим, что по построению любой элемент $x \in \mathbb{B}$ порождает линейный непрерывный функционал над банаховым пространством $\mathbb{B}^*$ согласно формуле

$$\langle x, f \rangle : \mathbb{B}^* \to \mathbb{C}.$$

Значит, имеет место вложение

$$\mathrm{J} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{**},$$

причем можно доказать, что соответствующий оператор вложения J является изометрией, а именно имеет место равенство

$$\|x^{**}\|_{**} = \|x\| \quad \text{при} \quad x^{**} = \mathrm{J}x.$$

В том случае, когда оператор J является сюръекцией, то банахово пространство $\mathbb{B}$ называется рефлексивным.

Связь слабой и $*-$слабой сходимости.

Заметим, что если банахово пространство $\mathbb{B}$ является рефлексивным, то имеет место равенство скобок двойственностей

$$\langle x^{**}, f\rangle_* = \langle f, x\rangle,$$

где

$$x^{**} \in \mathbb{B}^{**}, \quad f \in \mathbb{B}^*, \quad x \in \mathbb{B},$$

причем

$$x^{**} = \mathrm{J}x.$$

И поэтому для рефлексивных банаховых пространств $\mathbb{B}$ слабая и $*-$слабая сходимости на банаховом пространстве $\mathbb{B}^*$ совпадают. Хотя в общем случае, как мы уже говорили, слабая сходимость «сильнее» $*-$слабой сходимости.

Один интересный результат.

Теорема

Если $\mathbb{B}$ *— это рефлексивное нормированное пространство, то оно является банаховым.*

Доказательство на доске.

Теорема Хана–Банаха.

Теорема

Пусть X — это вещественное векторное пространство, а $X_0 \subset X$ — векторное подпространство, на котором задан линейный функционал $\langle \lambda, x \rangle$, причем имеет место неравенство

$$\langle \lambda, x \rangle \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X_0,$$

где

$$p(tx+(1-t)y) \leqslant tp(x)+(1-t)p(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in X, \quad t \in [0,1],$$

$$p(tx) = tp(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X, \quad t > 0.$$

Тогда существует такой линейный функционал $\langle \Lambda, x \rangle$, определенный на X и имеют место свойства

$$\langle \Lambda, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle \quad \text{на} \quad X_0,$$

Доказательство теоремы Хана–Банаха-1.

Итак, пусть

$$\{x_0\} \in X \backslash X_0 \neq \emptyset,$$

поскольку в случае $X = X_0$ доказывать нечего. Пусть $x, y \in X_0$. Тогда

$$\langle \lambda, x + y \rangle = \langle \lambda, x \rangle + \langle \lambda, y \rangle \leqslant p(x + y) \leqslant p(x - x_0) + p(y + x_0).$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\langle \lambda, x \rangle - p(x - x_0) \leqslant p(y + x_0) - \langle \lambda, y \rangle.$$

Правая часть не зависит от x, а левая — от y, поэтому найдется такая постоянная $a = a(x_0)$, что имеет место неравенство

$$\langle \lambda, x \rangle - p(x - x_0) \leqslant a \leqslant p(y + x_0) - \langle \lambda, y \rangle,$$

из которого получим

$$\langle \lambda, x \rangle - a \leqslant p(x - x_0), \quad \langle \lambda, y \rangle + a \leqslant p(y + x_0). \tag{1}$$

Доказательство теоремы Хана–Банаха-2.

Пусть

$$X_1 = X_0 \oplus tx_0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Определим на X_1 функционал

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle \overset{def:}{=} \langle \lambda, x \rangle + ta, \quad x \in X_0.$$

Линейность функционала Λ очевидна. Докажем, что он удовлетворяет следующему неравенству:

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle \leqslant p(x + tx_0) \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

С этой целью воспользуемся неравенствами (1).

Доказательство теоремы Хана–Банаха-3.

Пусть $t > 0$, тогда

$$\langle \Lambda, x + tx_0 \rangle = \langle \lambda, x \rangle + ta =$$
$$= t\left(\left\langle \lambda, \frac{x}{t} \right\rangle + a\right) \leqslant tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0),$$

$$\langle \Lambda, x - tx_0 \rangle = \langle \lambda, x \rangle - ta =$$
$$= t\left(\left\langle \lambda, \frac{x}{t} \right\rangle - +a\right) \leqslant tp\left(\frac{x}{t} - x_0\right) = p(x - tx_0).$$

Таким образом, требуемое продолжение линейного функционала λ получено.
Далее нужно воспользоваться леммой Цорна и получить требуемый результат.

Теорема доказана.



Комплексный вариант теоремы Хана–Банаха.

Теорема

Пусть X *— комплексно-линейное пространство, а* $X_0 \subset X$ *— его подпространство. Пусть для линейного функционала* $\langle \lambda, x \rangle$*, определенного на* X_0*, выполнено неравенство*

$$|\langle \lambda, x \rangle| \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X_0,$$

где $p(x)$ *— полунорма, определенная на* X*. Тогда существует такой линейный функционал* $\langle \Lambda, x \rangle$*, что*

$$|\langle \Lambda, x \rangle| \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X$$

и

$$\langle \Lambda, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle \quad \text{для} \quad x \in X_0.$$



Доказательство комплексного варианта теоремы Хана–Банаха-1.

Рассмотрим вещественный функционал

$$\operatorname{Re}\langle\lambda, x\rangle.$$

Пусть

$$\operatorname{Re}\langle\Lambda, x\rangle$$

— это его расширение, полученное согласно уже доказанной теоремы Хана–Банаха. Положим по определению

$$\langle\Lambda, x\rangle = \operatorname{Re}\langle\Lambda, x\rangle - i\operatorname{Re}\langle\Lambda, ix\rangle$$

$\square$ Эта формула получается так.

$$l(x) = \operatorname{Re}\langle\Lambda, x\rangle, \; l(ix) = \operatorname{Re}\langle\Lambda, ix\rangle = \operatorname{Re}\left(i\langle\Lambda, x\rangle\right) = -\operatorname{Im}\langle\Lambda, x\rangle.$$

Значит,

$$\langle\Lambda, x\rangle = l(x) - il(ix). \quad \boxtimes$$

Это и есть искомое расширение.

Доказательство комплексного варианта теоремы Хана–Банаха-2.

Проверим неравенство, что

$$|\langle\Lambda, x\rangle| \leqslant p(x).$$

Действительно,

$$\langle\Lambda, x\rangle = |\langle\Lambda, x\rangle| e^{i\vartheta}.$$

Но тогда

$$|\langle\Lambda, x\rangle| = \mathrm{Re}\,|\langle\Lambda, x\rangle| = \mathrm{Re}\langle\Lambda, e^{-i\vartheta}x\rangle \leqslant p(xe^{-i\vartheta}) = p(x).$$

Теорема доказана.

Первое следствие из теоремы Хана–Банаха.

Теорема

Пусть X *— это нормированное линейное пространство, причем*

$$Y \subset X \quad \text{и} \quad \lambda \in Y^*,$$

где Y *линейное подпространство* X. *Тогда найдется такое продолжение* Λ *функционала* λ, *что имеет место равенство*

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Доказательство-1.

Возьмем в качестве полунормы

$$p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|.$$

Очевидно, имеет место оценка

$$|\langle \lambda, x\rangle| \leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x \in Y.$$

В силу теоремы Хана–Банаха существует линейный функционал Λ такой, что

$$|\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\| \quad \text{при} \quad x \in X.$$

Возьмем $supremumu$ по $\|x\| = 1$ от обеих частей и получим неравенство

$$\|\Lambda\|_{X^*} \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}.$$



Доказательство-2.

С другой стороны,

$$|\langle \lambda, x\rangle| = |\langle \Lambda, x\rangle| \quad \text{для} \quad x \in Y,$$

поэтому взяв $supremum$ по $x \in Y$ получим неравенство

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|x\|=1, x\in Y} |\langle \lambda, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1, x\in Y} |\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|=1, x\in X} |\langle \Lambda, x\rangle| = \|\Lambda\|_{X^*}.$$

Итак, первое следствие доказано.

Второе следствие из теоремы Хана–Банаха.

Теорема

Пусть $y \in X$, *где* X *— это нормированное пространство. Тогда существует ненулевой функционал* $\Lambda \in X^*$ *такой, что*

$$\langle \Lambda, y \rangle = \|\Lambda\|_{X^*} \|y\|.$$

Доказательство.

Пусть

$$Y = \left\{ay \middle| \, a \in \mathbb{C}^1\right\} \quad \text{и} \quad \langle \lambda, ay \rangle = a\|y\|$$

— это линейный функционал над $Y \subset X$. Согласно первому следствию из теоремы Хана–Банаха найдется линейный функционал

$$\Lambda \in X^*, \quad \|\lambda\|_{Y^*} = \|\Lambda\|_{X^*},$$

но

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|y\|=1} |\langle \lambda, y \rangle| = 1,$$

значит,

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1.$$

Причем на Y

$$\langle \Lambda, ay \rangle = \langle \lambda, ay \rangle = a\|y\| \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{C}^1.$$

Следовательно,

$$\langle \Lambda, y \rangle = \|\Lambda\|_{X^*}\|y\|.$$

Третье следствие из теоремы Хана–Банаха.

Теорема

Пусть Z *— подпространство нормированного пространства* X *и пусть* $y \in X$, *причем*

$$\mathrm{distance}\{y, Z\} = d > 0.$$

Тогда существует такой линейный функционал $\Lambda \in X^*$, *что*

$$\|\Lambda\|_{X^*} \leqslant 1, \quad \langle \Lambda, y \rangle = d, \quad \langle \Lambda, z \rangle = 0$$

для всех $z \in Z$.

Четвертое следствие из теоремы Хана–Банаха.

Теорема

Пусть $\mathbb{B}$ *— банахово пространство. Если* $\mathbb{B}^*$ *сепарабельно, то* $\mathbb{B}$ *также сепарабельно.*

Доказательство-1.

Пусть $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — счетное всюду плотное в $\mathbb{B}^*$ множество. Теперь выберем $\{x_n\} \in \mathbb{B}$ таким образом, чтобы имели место свойства

$$\|x_n\| = 1, \quad |\langle \lambda_n, x_n \rangle| \geqslant \|\lambda_n\|_*/2.$$

☐ Поскольку

$$\|\lambda_n\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle \lambda_n, x \rangle| .$$

Поэтому такая последовательность $\{x_n\}$ существует. ☒.

Доказательство-2.

Пусть

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \middle| \, \alpha_k \in \mathbb{Q}, \; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Докажем, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathbb{B}$. Пусть нет. Тогда существует такой элемент

$$y \in \mathbb{B} \backslash \overline{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad \lambda \in \mathbb{B}^*,$$

что

$$\langle \lambda, y \rangle \neq 0, \quad \langle \lambda, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\mathcal{D}}.$$

В силу плотности $\{\lambda_n\}$ в $\mathbb{B}^*$, с одной стороны, найдется такая подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$ такая, что

$$\lambda_{n_k} \to \lambda \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}^*, \quad \text{т. е.} \quad \|\lambda - \lambda_{n_k}\| \to 0.$$

Доказательство-3.

С другой стороны, имеет место цепочка

$$\|\lambda_{n_k}\|_*/2 \leqslant |\langle \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| = |\langle \lambda - \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| \leqslant \|\lambda - \lambda_{n_k}\|_* \to 0.$$

Значит,

$$\lambda_{n_k} \to \theta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}^*,$$

а значит

$$\lambda = \theta.$$

Противоречие, доказывающее теорему.

Теорема доказана.

Теоремы Банаха–Штейнгауза.

Пусть

$$F_\alpha : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2, \quad \alpha \in I$$

— это семейство не обязательно линейных отображений банаховых пространств относительно норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, соответственно.

В этом разделе лекций мы рассмотрим две теоремы, которые все принято называть теоремами Банаха–Штейнгауза.

Как мы покажем все эти теоремы являются следствиями теоремы Бэра о категориях. Но сначала докажем теорему о равномерной ограниченности

Теорема о равномерной ограниченности.

Теорема

Пусть

(i) *оператор* F_α *непрерывен для каждого* $\alpha \in I$;

(ii)

$$\|F_\alpha(x+y)\|_2 \leqslant \|F_\alpha(x)+F_\alpha(y)\|_2, \quad \|F_\alpha(\lambda x)\|_2 \leqslant |\lambda| \|F_\alpha(x)\|_2$$

для всех $x, y \in \mathbb{B}_1$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ *и* $\alpha \in I$;

(iii) *для каждого* $x \in \mathbb{B}_1$

$$\sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty.$$

Тогда семейство отображений $\{F_\alpha\}$ *равномерно по* $\alpha \in I$ *непрерывно в нуле:* $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{\alpha \in I, \, \|x\|_1 < \delta} \|F_\alpha(x)\|_2 = 0.$

Доказательство-1.

Докажем, что для каждого F_α множество

$$b_n = \{x \in \mathbb{B}_1 : \ \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\}$$

замкнуто.

☐ Действительно, пусть

$$x_m \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1 \quad \text{и} \quad \{x_m\} \subset b_n,$$

тогда в силу непрерывности F_α

$$F_\alpha(x_m) \to F_\alpha(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Но

$$\|F_\alpha(x_m)\|_2 \leqslant n \Rightarrow \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n \Rightarrow x \in B_n.$$

☒ Поэтому множество

$$X_n = \bigcap_{\alpha \in I} b_n \quad \text{замкнуто.}$$



Доказательство-2.

Докажем, что

$$\mathbb{B}_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

□ Действительно, заметим, что в силу условия (iii)

$$\sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty,$$

а в силу определения b_n имеем

$$X_n = \left\{ x \in \mathbb{B}_1 : \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n \right\},$$

но тогда из (iii) вытекает, что каждый элемент $x \in \mathbb{B}_1$ принадлежит какому-то X_n. ☒

Доказательство-3.

Каждое X_n замкнуто в $\mathbb{B}_1$, а $\mathbb{B}_1$ является банаховым, поэтому в силу доказанной ранее теоремы Бэра о категориях найдется такое $n \in \mathbb{N}$ и такой открытый шар

$$O(x_0, \varepsilon) \subset X_n.$$

Это означает, что

$$\text{для всех} \quad \|y\|_1 < \varepsilon, \quad \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x_0 + y)\|_2 \leqslant n.$$

В своя очередь из свойства (ii) вытекает неравенство

$$\text{для всех} \quad \|y\|_1 < \varepsilon, \quad \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(y + x_0)\|_2 + \\ + \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(-x_0)\|_2 \leqslant n + c(x_0) < +\infty.$$

Доказательство-4.

Итак,

$$\text{для всех} \quad \|y\|_1 < \varepsilon, \quad \sup_{\alpha\in I} \|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant n + c(x_0) < +\infty.$$

В силу свойства (ii) однородности F_α имеем

$$y = \frac{\varepsilon}{\delta} x, \qquad \sup_{\alpha\in I,\ \|x\|<\delta} \|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}\left(n + c_0(x_0)\right).$$

Теорема доказана.

Первая теорема Банаха–Штейнгауза.

Теорема

Пусть $\{T_\alpha\}$ *— это семейство линейных и непрерывных операторов*

$$T_\alpha : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2 \quad \text{для всех} \quad \alpha \in I.$$

Пусть для каждого $x \in \mathbb{B}_1$

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\|_2 \leqslant c(x) < +\infty,$$

тогда

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{1\to 2} < +\infty.$$

Доказательство-1.

Применим теорему о равномерной ограниченности к семейству

$$F_\alpha = T_\alpha.$$

Тогда получим, что

$$\sup_{\alpha\in I,\ \|x\|_1<\delta} \|T_\alpha x\|_2 < 1,$$

но отсюда заменой получим, что

$$\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha\|_{1\to 2} = \sup_{\alpha\in I,\ \|z\|_1<1} \|T_\alpha x\|_2 < 1/\delta.$$

Теорема доказана.

Вторая теорема Банаха–Штейнгауза.

Теорема

Пусть $\{T_n\}$ *— это последовательность линейных непрерывных операторов, причем*

$$T_n : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

и

$$T_n x \to T_0 x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2 \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathbb{B}_1.$$

Тогда T_0 *— линейный и непрерывный оператор.*

Доказательство-1.

Из сильной сходимости вытекает, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\|_2 \leqslant c_1(x) < +\infty,$$

но тогда из первой теоремы Банаха–Штейнгауза получим, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{1\to 2} < +\infty,$$

тогда

$$\|T_0 x\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \|T_n x\|_2 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \|T_n\|_{1\to 2} \|x\|_1 \leqslant c_2 \|x\|_1.$$

Значит, T_0 — это ограниченный оператор, а в силу линейности непрерывный.

Теорема доказана.



Операторные топологии-1.

По ходу лекции мы столкнулись уже с двумя типами сходимостей операторов из пространства

$$\mathfrak{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2).$$

Первый тип — это равномерная сходимость:

$$\|A_n - A\|_{1\to 2} = \sup_{\|x\|_1=1} \|(A_n - A)x\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Второй тип — это сильная сходимость:

$$\|(A_n - A)x\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{B}_1.$$

Операторные топологии-2.

Наконец, еще один тип операторной сходимости — это слабая сходимость

$$\langle f, (A_n - A)x \rangle \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{B}_1, \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}_2^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}_2$ и $\mathbb{B}_2^*$.

Разумеется у пространства $\mathfrak{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ есть и "обычные"типы сходимостей как и у всякого банахова пространства и при этом введенная только что слабая операторная сходимость, вообще говоря, отличается от стандартной слабой сходимости.

Лекция 8. Банаховы пространства. Дальнейшее развитие теории.

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

1 ноября 2012 г.

Открытые отображения.

Пусть $(\mathbb{B}_1, \|\cdot\|_1)$ и $(\mathbb{B}_2, \|\cdot\|_2)$ — это банаховы пространства.

Определение 1. Отображение $\mathbb{T}$ называется открытым, если образ всякого открытого множества в $\mathbb{B}_1$ открыт в $\mathbb{B}_2$.

Примером отображения, не являющегося открытым, будет следующее отображение:

$$\mathbb{T} : \mathbb{B}_1 \to \theta,$$

а θ — это замкнутое множество.

Обозначение:

$$\operatorname{Im}\mathbb{T} = \{y \in \mathbb{B}_2 : \ y = \mathbb{T}(x), \ x \in \mathbb{B}_1\}.$$

Теорема об открытом отображении.

Теорема

Пусть $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ *и* $\operatorname{Im}\mathbb{T} = \mathbb{B}_2$, *тогда* $\mathbb{T}$ *— это открытое отображение.*

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Символом $b_i(x_0, r)$ будем обозначать открытый шар в банаховом пространстве $\mathbb{B}_i$ при $i = \overline{1, 2}$.

Первая лемма.

Лемма

Пусть выполнены условия теоремы об открытом отображении. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что*

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon))}.$$

Доказательство-1.

Поскольку $\operatorname{Im} \mathbb{T} = \mathbb{B}_2$, то

$$\mathbb{B}_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathbb{T}(b_1(0,n))}.$$

В силу теоремы Бэра о категориях найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{B}_1$ и $r > 0$, что

$$b_2(x_0, r) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0,n_0))}.$$

Заметим, что

$$\overline{\mathbb{T}(b_1(0,n_0))}$$

— это симметричное относительно нуля и выпуклое множество, что следует из абсолютной выпуклости $b_1(0,n_0)$ и линейности оператора $\mathbb{T}$.

Доказательство-2.

Поэтому имеет место вложение

$$M \equiv \{y : \; y = \alpha z_1 + (1-\alpha)(-z_2), \; z_1, z_2 \in b_2(x_0, r)\} \subset$$
$$\subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))}.$$

Но M — открытое множество, содержащее θ. Следовательно, найдется такая окрестность нуля

$$b_2(0, \varepsilon) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))}$$

$$\lambda b_2(0, \varepsilon) = b_2(0, \lambda\varepsilon) \subset \lambda\overline{\mathbb{T}(b_1(0, n_0))} = \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \lambda n_0))}.$$

Доказательство-3.

Пусть

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{n_0},$$

тогда

$$\delta = \frac{\varepsilon^2}{n_0}$$

и

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon))}.$$

Лемма доказана.

Вторая лемма.

Лемма

Пусть выполнены все условия теоремы об открытом отображении, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \mathbb{T}(b_1(0, 3\varepsilon)),$$

где ε и $\delta(\varepsilon)$ связаны соотношением предыдущей леммы.

Доказательство-1.

Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2^{n-1}}, \quad \delta(\varepsilon_n) < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_{n-1}).$$

где для каждого ε_n величина $\delta(\varepsilon_n)$ — соответствующая величина в смысле предыдущей леммы.

Итак,

$$b_2(0, \delta(\varepsilon_1)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon_1))}.$$

Пусть

$$y \in b_2(0, \delta(\varepsilon_1))$$

— произвольное фиксированное. Докажем, что найдется $x \in b_1(0, 3\varepsilon)$ такое, что

$$y = \mathbb{T}x.$$



Доказательство-2.

Рассмотрим шар

$$b_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2).$$

Имеем

$$b_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2) \bigcap b_2(0, \delta(\varepsilon_1)) \neq \emptyset.$$

Поскольку

$$b_2(0, \delta(\varepsilon_1)) \subset \overline{\mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon_1))},$$

то

$$b_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2) \bigcap \mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon_1)) \neq \emptyset.$$

Следовательно, найдется такое $x_1 \in b_1(0, \varepsilon_1)$, что

$$\|y - \mathbb{T}x_1\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_2).$$



Доказательство-3.

Следовательно,

$$z = y - \mathbb{T}(x_1) \in b_2(0, \delta(\varepsilon_2)).$$

Значит,

$$b_2(z, \delta(\varepsilon_3)/2) \bigcap \mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon_2)) \neq \emptyset.$$

Следовательно, найдется

$$x_2 \in b_1(0, \varepsilon_2),$$

что

$$y - \mathbb{T}(x_1) - \mathbb{T}(x_2) \in b_2(0, \delta(\varepsilon_3)/2).$$

Значит,

$$y - \mathbb{T}(x_1) - \mathbb{T}(x_2) \in b_2(0, \delta(\varepsilon_3))$$

и так далее по индукции.



Доказательство-4.

Итак,

$$\|x_n\|_1 \leqslant \varepsilon_n,$$

$$\|y - \mathbb{T}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_{n+1}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n, \quad y = \mathbb{T}(x), \quad \|x\| < 3\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы об открытом отображении.

Пусть $A \subset \mathbb{B}_1$ — открыто.

$$x_0 \in A, \quad y_0 = \mathbb{T}(x_0).$$

Поскольку A открыто, то найдется такой шар с центром в нуле

$$b_1(0, \varepsilon) \subset \mathbb{B}_1,$$

что

$$x_0 + b_1(0, \varepsilon) = b_1(x_0, \varepsilon) \subset A.$$

По предыдущей лемме найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$b_2(0, \delta(\varepsilon)) \subset \mathbb{T}(b_1(0, \varepsilon)).$$

Но тогда

$$y_0 + b_2(0, \delta(\varepsilon)) = b_2(y_0, \delta(\varepsilon)) \subset \mathbb{T}(x_0 + b_1(0, \varepsilon)) \subset \mathbb{T}(A).$$

Теорема доказана.



Теорема Банаха об обратном отображении

Необходимое и достаточное условие существования обратного отображения — это

$$\operatorname{Im} \mathbb{T} = \mathbb{B}_2, \quad \operatorname{Ker} \mathbb{T} = \theta.$$

Теорема

Пусть $\mathbb{T} \in \mathfrak{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ *и выполнены указанные условия, то существует обратное непрерывное отображение.*

Доказательство.

Пусть A — открытое множество в $\mathbb{B}_1$, тогда в силу теоремы об открытом отображении

$$\mathbb{T}(A) \quad \text{открыто в} \quad \mathbb{B}_2,$$

то множество

$$(\mathbb{T}^{-1})^{-1}(A) = \mathbb{T}(A) \quad \text{открыто в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Следовательно, $\mathbb{T}^{-1}$ — это непрерывное отображение.

Теорема доказана.

Замкнутый график.

Определение 2. Графиком линейного отображения

$$\mathbb{T} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

называется множество

$$\mathbf{Gr}(\mathbb{T}) = \{x \oplus \mathbb{T}(x) : \ x \in \mathbb{B}_1\} \subset \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2.$$

Если отображение $\mathbb{T}$ непрерывно, то $\mathbf{Gr}(\mathbb{T})$ есть замкнутое подмножество в $\mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2$.

Теорема о замкнутом графике.

Теорема

Если график линейного отображения

$$\mathbb{T} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

замкнут, то $\mathbb{T}$ *— непрерывное отображение.*

Доказательство.

Если подмножество

$$\mathbf{Gr}(\mathbb{T}) \subset \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2$$

замкнуто, то оно есть банахово подпространство. Отображение

$$\mathbb{P}_1 : x \oplus \mathbb{T}(x) \to x$$

есть линейное непрерывное отображение банахова пространства $\mathbf{Gr}(\mathbb{T})$ на банахово пространство $\mathbb{B}_1$, причем

$$\mathrm{Im}(\mathbb{P}_1) = \mathbb{B}_1, \quad \mathrm{Ker}(\mathbb{P}_1) = \theta.$$

В силу теоремы Банаха об обратном отображении отображение

$$\mathbb{B}_1 \to \mathbf{Gr}(\mathbb{T}) : x \to x \oplus \mathbb{T}(x)$$

непрерывно. Следовательно, отображение

$$\mathbb{T} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2 : x \to x \oplus \mathbb{T}(x) \to \mathbb{T}(x)$$

как композиция непрерывных отображений является непрерывным отображением.

Свойства слабой и $*-$слабой сходимостей.

Теорема

Справедливы следующие два утверждения:

(i) *Всякая слабо сходящаяся последовательность* $\{u_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}$ *ограничена, причем*

$$\text{если} \quad u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \text{то} \quad \|u_\infty\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|;$$

(ii) *Всякая $*-$слабо сходящаяся последовательность* $\{f_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}^*$ *ограничена, причем*

$$\text{если} \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \text{то} \quad \|f_\infty\|_* \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_*.$$



Доказательство-1.

Доказательство (i). В силу уже установленного изометрического вложения $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**}$ мы можем рассмотреть слабо сходящуюся последовательность

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B},$$

как последовательность функционалов из $\mathbb{B}^{**}$:

$$\mathrm{I}_n(f) \equiv \langle u_n, f \rangle_* = \langle f, u_n \rangle \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^* \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N},$$

Поскольку последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится в $\mathbb{B}$, то для каждого фиксированного $f \in \mathbb{B}^*$ числовая последовательность $\mathrm{I}_n(f)$ ограничена, но тогда по теореме о резонансе (первая теорема Банаха—Штейнгауза) имеем, что последовательность $\{\|u_n\|\}$ тоже ограничена.

Доказательство-2.

Теперь заметим, что если отождествить $\mathbb{B}$ с некоторым подпространством в $\mathbb{B}^{**}$, то можно обозначать элемент $u \in \mathbb{B}$ и соответствующий ему элемент $\mathbb{J}u \in \mathbb{B}^{**}$ одной и той же буквой u. С учетом этого замечания имеем

$$\|u_n\| = \|u_n\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle u_n, f\rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u_n\rangle| ,$$

поэтому получаем следующее неравенство

$$\|u_n\| \geqslant |\langle f, u_n\rangle| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Перейдем к нижнему пределу при $n \to +\infty$ в последнем неравенстве и получим неравенство

$$\liminf_{n\to+\infty} \|u_n\| \geqslant |\langle f, u_\infty\rangle| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*, \tag{1}$$

поскольку

$$\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u_\infty\rangle \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Доказательство-3.

Поскольку левая часть неравенства (1) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, то возьмем supremum от обеих частей по $f \in \mathbb{B}^* : \ \|f\|_* = 1$ и получим требуемое неравенство:

$$\liminf_{n \to +\infty} \|u_n\| \geqslant \|u_\infty\|,$$

поскольку

$$\|u_\infty\| = \|u_\infty\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle u_\infty, f\rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u_\infty\rangle| \, .$$

Доказательство-4.

Доказательство (ii). Введем обозначение

$$\mathrm{K}_n(u) \equiv \langle f_n, u \rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B} \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку числовая последовательность $\{\mathrm{K}_n(u)\}$ сходится для каждого $u \in \mathbb{B}$, то из теоремы о резонансе вытекает ограниченность числовой последовательности $\{\|f_n\|_*\}$. По определению нормы $\| \quad \|_*$ имеем

$$\|f_n\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle f_n, u \rangle| \geqslant |\langle f_n, u \rangle| \,.$$

Теперь перейдем к нижнему пределу при $n \to +\infty$, тогда поскольку

$$\langle f_n, u \rangle \to \langle f_\infty, u \rangle \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B},$$

то получим неравенство

$$\liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_* \geqslant |\langle f_\infty, u \rangle| \,. \qquad (2)$$

Доказательство-5.

Поскольку левая часть неравенства (2) не зависит от $u \in \mathbb{B}$, то перейдем в обеих частях к supremum по $u \in \mathbb{B} : \ \|u\| = 1$ и получим требуемое неравенство:

$$\liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_* \geqslant \|f_\infty\|_*,$$

поскольку

$$\|f_\infty\|_* = \sup_{\|u\|=1} |\langle f_\infty, u\rangle| \, .$$

Теорема доказана.

Достаточное условие слабой сходимости.

Теорема

Пусть $\{u_n\}$ *— ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства* $\mathbb{B}$*. Тогда из* $\{u_n\}$ *можно выделить слабо сходящуюся в* $\mathbb{B}$ *подпоследовательность* $\{u_{n_n}\}$ *:*

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство-1.

Для простоты докажем эту теорему для случая *сепарабельного* банахова пространства $\mathbb{B}$.
Поскольку пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно, значит мы можем отождествить пространство $\mathbb{B}$ с дважды сопряженным $\mathbb{B}^{**}$. Стало быть, имеем $\mathbb{B}^{**} = \mathbb{B}$, а так как $\mathbb{B}$ сепарабельно, то сепарабельно и пространство $\mathbb{B}^{**}$, но это пространство является сопряженным к банахову пространству $\mathbb{B}^{*}$. Значит, в силу следствия 4 из теоремы Хана—Банаха пространство $\mathbb{B}^{*}$ является сепарабельным.

Доказательство-2.

Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — это счетное всюду плотное в $\mathbb{B}^*$ множество. Поскольку последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ ограничена по норме, то числовая последовательность

$$\langle f_1, u_n \rangle$$

ограниченная, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_1, u_{n_1} \rangle .$$

Числовая последовательность

$$\langle f_2, u_{n_1} \rangle$$

тоже ограниченная, а значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_2, u_{n_2} \rangle .$$



Доказательство-3.

Продолжая таким образом этот процесс мы получим подпоследовательность $\{u_{n_{k+1}}\}$, которая слабо сходится на элементах f_j при $j = 1, ..., k+1$. Следовательно, диагональная подпоследовательность $\{u_{n_n}\}$ исходной последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится на счетном всюду плотном в $\mathbb{B}^*$ множестве $\{f_n\}$.
Докажем теперь, что построенная подпоследовательность $\{u_{n_n}\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится к некоторому элементу $u_\infty \in \mathbb{B}$.

Доказательство-4.

Пусть $f \in \mathbb{B}^*$ — произвольным образом выбранный фиксированный элемент. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f, u_{m_m} \rangle| \leqslant |\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{n_n} \rangle| +$$
$$+ |\langle f_k, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| + |\langle f, u_{m_m} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|f - f_k\|_* \|u_{n_n}\| + |\langle f_k, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| + \|f - f_k\|_* \|u_{m_m}\|.$$

Первое и последнее слагаемые в правой части последнего неравенства могут быть сделаны сколь угодно малыми в силу плотности $\{f_k\}$ в пространстве $\mathbb{B}^*$ относительно сильной сходимости и ограниченности подпоследовательности $\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\} \subset \mathbb{B}$. Наконец, второе слагаемое, как мы уже доказали, стремится к нулю при $n, m \to +\infty$.

Доказательство-5.

Значит, числовая последовательность

$$\{\langle f, u_{n_n}\rangle\}$$

является фундаментальной при любом $f \in \mathbb{B}^*$. Значит, сходится. Стало быть, найдется некоторый элемент $u \in \mathbb{B}$, что

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Достаточное условие $*-$слабой сходимости.

Теорема

Пусть $\mathbb{B}$ *— сепарабельное банахово пространство и* $\{f_n\}$ *— ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства* $\mathbb{B}^*$. *Тогда из* $\{f_n\}$ *можно выделить* $*-$*слабо сходящуюся в* $\mathbb{B}^*$ *подпоследовательность* $\{f_{n_n}\}$:

$$f_{n_n} \xrightarrow{*} f \quad *-\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Равномерная выпуклость банаховых пространств.

Определение 3. *Пусть* $\mathbb{B}$ *— это банахово пространство. Пространство* $\mathbb{B}$ *называется равномерно выпуклым, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что из неравенств* $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ *и* $\|u - v\| \geqslant \varepsilon > 0$ *следует*

$$\|u + v\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)). \tag{3}$$

Приведем без доказательства следующий важный результат В. Д. Мильмана.

Теорема

Всякое равномерно выпуклое банахово пространство $\mathbb{B}$ *рефлексивно.*



Достаточное условие сильной сходимости.

Теорема

Если $\mathbb{B}$ *— это равномерно выпуклое банахово пространство, то из того условия, что*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

и

$$\|u_n\| \to \|u\|,$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство-1.

Без ограничения общности можно считать, что $\|u\| = 1$ и $\|u_n\| \neq 0$. Введем следующее обозначение:

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Ясно, что $\|v_n\| = 1$ и $v_n \rightharpoonup u$ при $n \to +\infty$. Теперь возьмем $\varepsilon_n = \|v_n - u\|$, тогда по определению 3 найдется такая неубывающая функция $\delta(\varepsilon)$ и $\delta(0) = 0$, что

$$\|v_n + u\| \leqslant 2\left(1 - \delta\left(\|v_n - u\|\right)\right). \tag{4}$$

Поскольку в силу теоремы Мильмана банахово пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно, поэтому имеем

$$\|v_n + u\| = \|v_n + u\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle v_n + u, f\rangle_*| = \\ = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, v_n + u\rangle| \geqslant |\langle f, v_n + u\rangle| \tag{5}$$

Доказательство-2.

Переходя к нижнему пределу в неравенстве (4) с учетом неравенства (5), получим следующее неравенство:

$$2 \liminf_{n \to +\infty} \left(1 - \delta\left(\|v_n - u\|\right)\right) \geqslant \liminf_{n \to +\infty} \left|\langle f, v_n + u \rangle\right| = 2 \left|\langle f, u \rangle\right|, \tag{6}$$

поскольку $v_n \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{B}$. Левая часть неравенства (6) не зависит от $f \in \mathbb{B}^*$, поэтому можно перейти к supremum по всем $f \in \mathbb{B}^* : \ \|f\|_* = 1$ и получить неравенство

$$2 \liminf_{n \to +\infty} \left(1 - \delta\left(\|v_n - u\|\right)\right) \geqslant 2\|u\|_{**} = 2\|u\| = 2.$$

Доказательство-3.

Которое возможно только в том случае, когда

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_n - u\| = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$u_n = \|u_n\| v_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку $\|u_n\| \to \|u\| = 1.$

Теорема доказана.

Лекция 10. Банаховы пространства. Спектральная теория.

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

8 ноября 2011 г.

Банаховы алгебры.

Определение. Банаховой алгеброй с единицей $\mathcal{A}$ называется такое линейное пространство над полем $\mathbb{C}^1$, в котором определена бинарная операция умножения

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} : \quad a \times b \stackrel{def}{=} ab,$$

которая является ассоциативной и билинейной операцией:

$$(ab)c = a(bc);$$

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)b = \alpha_1 a_1 b + \alpha_2 a_2 b, \quad a(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = \beta_1 a b_1 + \beta_2 a b_2,$$

кроме того, векторное пространство $\mathcal{A}$ является банаховым пространством относительно некоторой нормы $\| \quad \|$, причем

$$\|ab\| \leqslant \|a\| \|b\| \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}.$$

Наконец, существует единица $\mathrm{id} : \mathrm{id} \cdot a = a \cdot \mathrm{id} = a$.

Замечание и пример.

Из неравенства $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ вытекает непрерывность умножения. Действительно, пусть

$$a_n \to a, \quad b_n \to b \quad \text{сильно в} \quad \mathcal{A},$$

тогда

$$\|a_n b_n - ab\| \leqslant \|a_n\|\|b_n - b\| + \|b\|\|a - a_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Банаховой алгеброй с единицей является, в частности, пространство линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{B})$ относительно нормы

$$\|\mathbb{T}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathbb{T}x\|.$$

Это наиболее существенный для нас пример.

Интеграл Бохнера.

Везде далее $\mathcal{A}$ — это банахова алгебра с единицей.
Пусть

$$f(z) : D \subset \mathbb{C}^1 \to \mathcal{A}$$

— это банаховозначная функция комплексного переменного, определенного в области D.

Пусть $l \in \mathbb{C}^1$ — гладкий жорданов контур.

Если строить, как и в случае $\mathcal{A} = \mathbb{C}^1$, интеграл Римана через интегральные суммы, а предельный переход осуществлять в смысле сильной сходимости рядов в банаховом пространстве, мы получим интеграл Бохнера

$$\int\limits_{l} f(z)\, dz \in \mathcal{A}.$$



Аналитичность.

Определение аналитичности банаховозначных функций такое же как и в ТФКП:

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad z, z+\Delta z \in D \subset \mathbb{C}^1,$$

только предел понимается не в смысле нормы $|\cdot|$ банахова пространства $\mathbb{C}^1$, а в смысле нормы $\|\cdot\|$ банахова пространства $\mathcal{A}$.

Оказывается, что аналитичность $\mathcal{A}-$значной функции $f(z)$ эквивалентна аналитичности следующей $\mathbb{C}^1-$значной функции

$$\varphi(z) = \langle w^*, f(z)u\rangle \quad \text{для всех} \quad w^* \in \mathcal{A}^*, \quad u \in \mathcal{A},$$

где

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

— это скобки двойственности между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$.

Обратимые элементы банаховой алгебры.

Определение. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется обратимым, если существует такой элемент $a^{-1} \in \mathcal{A}$, что имеют место следующие равенства:

$$a^{-1}a = aa^{-1} = \mathrm{id}.$$

Если элементы $a, b \in \mathcal{A}$ обратимы, то элемент $ab \in \mathcal{A}$ тоже обратим, причем обратным является элемент $b^{-1}a^{-1}$. Действительно,

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = \mathrm{id},$$
$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}b = \mathrm{id}.$$

Нетрудно доказать единственность обратного элемента.



Лемма о ряде Неймана.

Лемма

Пусть $a \in \mathcal{A}$. *Если* $\|a\| < 1$, *то элемент*

$$(\mathrm{id} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \in \mathcal{A}.$$

Доказательство.

Положим по определению $a^0 = \mathrm{id}$. Тогда имеет место равенство

$$(\mathrm{id} - a)\sum_{n=0}^{m} a^n = \sum_{n=0}^{m} a^n - \sum_{n=0}^{m} a^{n+1} = \mathrm{id} - a^{m+1}.$$

Значит,

$$\left\|(\mathrm{id} - a)\sum_{n=0}^{m} a^n - \mathrm{id}\right\| = \|a^{m+1}\| \leqslant \|a\|^{m+1} \to 0$$

при $m \to +\infty$, поскольку $\|a\| < 1$. Следовательно,

$$(\mathrm{id} - a)\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \mathrm{id},$$

$$(\mathrm{id} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n.$$

Еще одна лемма.

Лемма

Пусть элемент $a \in \mathcal{A}$ *обратим. Тогда при условии*

$$\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$$

обратим и элемент $a + b$, *причем*

$$(a+b)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-a^{-1}b)^{-n} \right) a^{-1}.$$

Доказательство.

Справедливо выражение

$$(a+b) = a(\mathrm{id} + a^{-1}b) \Rightarrow (a+b)^{-1} = (\mathrm{id} + a^{-1}b)^{-1}a^{-1} = $$
$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-a^{-1}b)^n\right) a^{-1}$$

при выполнении неравенства

$$\|a^{-1}b\| \leqslant \|a^{-1}\| \|b\| < 1 \Rightarrow \|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}.$$

Теорема об открытости подмножества обратимых элементов.

Теорема

Подмножество всех обратимых элементов банаховой алгебры A открыто, а отображение $a \to a^{-1}$ непрерывно в окрестности каждого обратимого элемента.

Доказательство-1.

Пусть $a \in \mathcal{A}$ обратим и a^{-1} — обратный элемент, тогда в силу предыдущей леммы элемент $(a+b)$ обратим при

$$\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1},$$

Значит, подмножество всех обратимых элементов с каждым своим элементом содержит некоторую окрестность, т. е. открыто.

Рассмотрим отображение

$$\mathbb{T} : a + b \to (a+b)^{-1},$$

где a — обратим, а для элемента b выполнено указанное неравенство. Рассмотрим последовательность $\{b_m\} \subset \mathcal{A}$ такую, что

$$\|b_m\| < \|a^{-1}\|^{-1} \quad \text{и} \quad \|b_m - b\| \to +0.$$

Доказательство-2.

Докажем, что

$$\|\mathbb{T}(a+b_m)-\mathbb{T}(a)\|\to +0 \quad \text{при} \quad m\to+\infty.$$

Действительно,

$$\|\mathbb{T}(a+b_m)-\mathbb{T}(a)\| = \left\|\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-a^{-1}b_m)^n\right)a^{-1}-a^{-1}\right\| =$$

$$= \left\|\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-a^{-1}b_m)^n\right)a^{-1}\right\| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\|a^{-1}\|^n\|b_m\|^n\|a^{-1}\| \to +0$$

при

$$\|b_m\|\to+0.$$

Резольвента.

Определение. Если для элемента $a \in \mathcal{A}$ существует элемент

$$(\lambda \cdot \mathrm{id} - a)^{-1} \in \mathcal{A} \quad \text{при некотором} \quad \lambda \in \mathbb{C}^1,$$

то элемент алгебры $\mathcal{A}$

$$R(\lambda, a) = (\lambda \cdot \mathrm{id} - a)^{-1}$$

называется резольвентой (единственность следует из единственности обратного элемента). Для удобства мы будем использовать упрощенное обозначение для резольвенты

$$R(\lambda, a) = (\lambda - a)^{-1}.$$

Определение. Множество

$$\mathrm{res}(a) \equiv \left\{\lambda \in \mathbb{C}^1 : \ \exists\, R(\lambda, a)\right\}$$

называется резольвентным множеством.

Ряд Неймана для резольвенты.

Пусть

$$\|a\| < |\lambda|,$$

тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$R(\lambda, a) = (\lambda - a)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n \qquad (1)$$

Значит, множество

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}^1 | \; |\lambda| > \|a\|\right\} \subset \mathrm{res}(a).$$

О непрерывности резольвенты.

Теорема

Пусть резольвента $R(\lambda, a)$ *некоторого элемента* $a \in \mathcal{A}$ *существует при* $\lambda \in D$, *где* D *— это компактное подмножество из* $\mathbb{C}^1$. *Тогда существует такая окрестность* $O(D)$ *компакта* D *и такая окрестность* $b(a, \varepsilon)$ *элемента* $a \in \mathcal{A}$, *что резольвента* $R(\lambda, a)$ *непрерывна по совокупности переменных*

$$(\lambda, a) \in O(D) \times b(a, \varepsilon).$$

Доказательство.

Прежде всего в силу теоремы о непрерывности отображения

$$\mathbb{T} : a \to a^{-1}$$

в окрестности обратимого элемента приходим к выводу, что в метрике

$$d((\lambda_1, a_1), (\lambda_2, a_2)) = \max\{|\lambda_1 - \lambda_2|, \|a_1 - a_2\|\}$$

для каждой точки $\lambda_0 \in D$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\lambda_0) > 0$, что резольвента $R(\lambda, a)$ непрерывна на множестве

$$(\lambda, a) \in \{|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon;\ a \in b(a_0, \varepsilon(\lambda_0))\}.$$

Когда λ_0 пробегает весь компакт D множества

$$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$$

образуют открытое покрытие компакта D. Из которого, можно выделить конечное подпокрытие. Выбирая теперь минимальное $\varepsilon(\lambda_0)$ из конечного их числа получаем утверждение теоремы.

Одна лемма.

Лемма

Пусть $U \in \mathcal{A}$ *— обратимый элемент. Тогда имеет место следующее равенство:*

$$UR(\lambda, a)U^{-1} = R(\lambda, UaU^{-1}).$$

$$(\lambda \mathrm{id} - UaU^{-1})UR(\lambda, a)U^{-1} = \lambda UR(\lambda, a)U^{-1} - UaR(\lambda, a)U^{-1} =$$
$$= U(\lambda \mathrm{id} - a)R(\lambda, a)U^{-1} = UU^{-1} = \mathrm{id}.$$

В силу единственности резольвенты лемма доказана.



Спектр элемента.

Определение. Спектром элемента $a \in \mathcal{A}$ называется множество дополнительное к резольвентному множеству этого элемента

$$\sigma(a) = \mathbb{C}^1 \backslash \mathrm{res}(a).$$

В силу последней леммы, если $U \in \mathcal{A}$ — это обратимый элемент, то

$$\sigma(UaU^{-1}) = \sigma(a).$$

Поскольку, как мы доказали резольвентное множество $\mathrm{res}(a)$ является открытым, то спектральное множество $\sigma(a)$ является замкнутым.

Тождество Гильберта или первое резольвентное уравнение.

Оно имеет следующий вид:

$$R(\lambda, a) - R(\mu, a) = -(\lambda - \mu) R(\lambda, a) R(\mu, a).$$

□ Рассмотрим тождество

$$(\mu \cdot \mathrm{id} - a) - (\lambda \cdot \mathrm{id} - a) = -(\lambda - \mu),$$

которое умножим на

$$R(\lambda, a) R(\mu, a).$$



Второе резольвентное уравнение.

Их два. И они имеют следующий вид:

$$R(\lambda, b) - R(\lambda, a) = R(\lambda, b)(b - a)R(\lambda, a)$$

и

$$R(\lambda, b) - R(\lambda, a) = R(\lambda, a)(b - a)R(\lambda, b).$$

Докажем, например, первое из них. Имеет место тождество

$$(\lambda \cdot \mathrm{id} - a) - (\lambda \cdot \mathrm{id} - b) = (b - a)$$

Умножим это тождество справа на $R(\lambda, a)$, а слева на $R(\lambda, b)$, тогда

$$R(\lambda, b)(\lambda \cdot \mathrm{id} - a)R(\lambda, a) - R(\lambda, b)(\lambda \cdot \mathrm{id} - b)R(\lambda, a) = R(\lambda, b)(b - a)R(\lambda, a)$$

Аналитичность резольвенты.

Заметим, что если $\lambda \in \mathrm{res}(a)$, то для близкого к этому λ числу μ в силу тождества Гильберта

$$R(\lambda, a) - R(\mu, a) = -(\lambda - \mu)R(\lambda, a)R(\mu, a)$$

получим равенство

$$\frac{R(\lambda, a) - R(\mu, a)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda, a)R(\mu, a).$$

Переходя к сильному пределу при $\mu \to \lambda$ получим равенство

$$\frac{dR(\lambda, a)}{d\lambda} = -R(\lambda, a)^2.$$

Следовательно, резольвента $R(\lambda, a)$ является $\mathcal{A}-$значной аналитической функцией на резольвентном множестве.



Особые точки резольвенты.

Докажем, что спектр $\sigma(a)$ любого элемента $a \in \mathcal{A}$ является непустым множеством. Действительно, предположим противное. Тогда резольвента аналитична на всей комплексной плоскости.

В частности, функция

$$\varphi(\lambda) = \langle w^*, R(\lambda, a)u \rangle$$

для всех $w^* \in \mathcal{A}^*$ и всех $u \in \mathcal{A}$ аналитична на всей комплексной плоскости. Тогда она константа. Но, очевидно, эта функция переменная по λ. Поэтому она имеет особые точки. Значит, особые точки имеет и резольвента.
Значит, справедлива следующая теорема:

Теорема

Спектр $\sigma(a)$ является непустым замкнутым множеством.

Алгебра функций, аналитических в окрестности спектра.

Пусть $a \in \mathcal{A}$ и $\sigma(a)$ — спектр. Тогда рассмотрим семейство всех функций $\mathcal{F}_a$, аналитических в некоторой (каждая в своей) окрестности спектра $\sigma(a)$.

Ясно, что относительно поточечного сложения и умножения на комплексные числа это семейство является линейным пространством. А относительно поточечного умножения является алгеброй.

Пусть $f(\lambda)$ — это функция, аналитическая в окрестности $D_f \supset \sigma(a)$ спектра, причем $l_f = \partial D_f$ — это жорданов контур. Рассмотрим следующий интеграл, понимаемый в смысле Бохнера:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda.$$

Гомоморфизм алгебр.

Итак, рассмотрим гомоморфизм алгебр

$$\mathcal{O}_a : \mathcal{F}_a \to \mathcal{A},$$

определенный равенством

$$f(a) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda.$$

(Интеграл в правой части называется интегралом Данфорда.)

Теорема

Указанное отображение является алгебраическим гомоморфизмом алгебр.

Доказательство-1.

Линейность отображения $\mathcal{O}_a$ очевидна.

Нам нужно доказать, что при этом отображении произведению двух функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ соответствует произведение элементов $f(a)$ и $g(a)$ из $\mathcal{A}$, определенных интегралами Данфорда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda,$$

$$g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_g} g(\mu) R(\mu, a)\, d\mu.$$

Итак, пусть области аналитичности D_f и D_g как окрестности спектра $\sigma(a)$ выбраны. Причем $l_f = \partial D_f$ и $l_g = \partial D_g$ являются жордановыми контурами и

$$D_g \cup \partial D_g \subset D_f, \quad \mathrm{distance}\{\partial D_g, \partial D_f\} > 0.$$

Доказательство-2.

$$f(a)g(a) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f} f(\lambda)R(\lambda,a)\,d\lambda \int\limits_{l_g} g(\mu)R(\mu,a)\,d\mu =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f}\int\limits_{l_g} f(\lambda)g(\mu)R(\lambda,a)R(\mu,a)\,d\mu\,d\lambda =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f}\int\limits_{l_g} f(\lambda)g(\mu)\frac{R(\lambda,a)-R(\mu,a)}{\mu-\lambda}\,d\mu\,d\lambda.$$

Доказательство-3.

Заметим, что поскольку $\lambda \notin \overline{D}_g$, то согласно теореме Коши имеем

$$\int\limits_{l_g} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu = 0,$$

а поскольку $\mu \in D_f$, то согласно теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \mu}\, d\lambda = f(\mu).$$

Поэтому

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f} \int\limits_{l_g} f(\lambda) g(\mu) \frac{R(\lambda, a) - R(\mu, a)}{\mu - \lambda}\, d\mu\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_g} f(\mu) g(\mu) R(\mu, a)\, d\mu.$$

Пример.

Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{A}$ матриц 2×2 с единицей. Пусть

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\lambda \cdot \mathrm{id} - a) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda \cdot \mathrm{id} - a) = (\lambda + 1)(\lambda - 3), \quad \sigma(a) = \{-1, 3\},$$

$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda + 1} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda - 3} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$f(-1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l} \frac{f(\lambda)}{\lambda + 1}\, d\lambda, \quad f(3) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l} \frac{f(\lambda)}{\lambda - 3}\, d\lambda,$$

$l = \{\lambda \in \mathbb{C}^1, |\lambda| = 4\}$, поэтому

$$f(a) = f(-1) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + f(3) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$



Одна лемма.

Лемма

Пусть $\sigma(a)$ *содержится в области* D *с жордановой границей* ∂D, *тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} R(\lambda, a)\, d\lambda = \mathrm{id}.$$

□ Действительно, пусть на контуре ∂D имеем $|\lambda| > \|a\|$, тогда согласно ряду Неймана для резольвенты имеем

$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} R(\lambda, a)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{1}{\lambda}\, d\lambda \cdot \mathrm{id} = \mathrm{id}. \boxtimes$$

О существовании обратной операторной функции.

Прежде всего заметим, что если функция $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{F}_a$ и не имеет нулей в некоторой окрестности спектра $\sigma(a)$, то функция $1/\varphi(\lambda)$ также аналитична в окрестности спектра.

Теорема

Пусть $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{F}_a$. Для существования $\varphi(a)^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(\lambda)$ не имела нулей на спектре $\sigma(a)$.

Доказательство-1.

Пусть $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{F}_a$ не имеет нулей в некоторой окрестности D спектра $\sigma(a)$. Тогда в этой окрестности

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} \in \mathfrak{F}_a,$$

$$\varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda) = 1$$

в D. С одной стороны, в силу предыдущей леммы имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)}R(\lambda, a)\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda)R(\lambda, a)\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} R(\lambda, a)\,d\lambda = \mathrm{id}.$$

Доказательство-2.

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)}R(\lambda,a)\,d\lambda=\varphi(a)\cdot\varphi(a)^{-1},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda)R(\lambda,a)\,d\lambda=\varphi(a)^{-1}\varphi(a).$$

Значит,

$$\varphi(a)\cdot\varphi(a)^{-1}=\varphi(a)^{-1}\varphi(a)=\mathrm{id}.$$

Итак, достаточность доказана.

Доказательство-3.

Докажем необходимость. Пусть функция $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{F}_a$ и имеет ноль в точке $\lambda_0 \in \sigma(a)$. Тогда функцию $\varphi(\lambda)$ можно представить в виде

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)h(\lambda), \quad h(\lambda) \in \mathfrak{F}_a.$$

Разумеется, функция $h(\lambda)$ тоже может обращаться в ноль в той же точке, но для дальнейшего это несущественно. Тогда в силу операторного исчисления имеем

$$\varphi(a) = (a - \lambda_0 \cdot \mathrm{id})h(a).$$

Доказательство-4.

Если бы существовал обратный элемент для $\varphi(a)$, то имело бы место равенство

$$(a - \lambda_0 \cdot \mathrm{id}) h(a) \varphi(a)^{-1} = \mathrm{id},$$

но это означает, что элемент

$$a - \lambda_0 \cdot \mathrm{id}$$

обратим, что противоречит тому, что $\lambda_0 \in \sigma(a)$.

Теорема доказана.

Лемма об отображении спектра.

Лемма

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Доказательство.

Пусть $\mu \in \mathbb{C}^1$ — фиксировано. Тогда рассмотрим в предыдущей лемме функцию

$$\varphi(\lambda) = \mu - f(\lambda).$$

Тогда в силу доказанной леммы операторная функция

$$\varphi(a) = \mu \cdot \mathrm{id} - f(a)$$

обратима, тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\lambda)$ не имеет нулей на спектре $\sigma(a)$.

В силу этого

$$\mu_0 \in \sigma(f(a)),$$

тогда и только тогда, когда найдется $\lambda_0 \in \sigma(a)$ такое, что

$$\mu_0 = f(\lambda_0).$$

Итак, утверждение доказано.



Степенные ряды.

Теорема

Пусть

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \lambda^n$$

— степенной ряд с радиусом сходимости $r > \|a\|$. *Тогда*

$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n a^n$$

Доказательство.

Итак, выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы

$$r > \|a\| + \varepsilon,$$

тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=\|a\|+\varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=\|a\|+\varepsilon} \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n a^n.$$

Спектральный радиус.

Определение. Спектральным радиусом $r(a)$ элемента a банаховой алгебры называется число

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Теорема

Справедлива формула

$$r(a) = \lim_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Доказательство-1.

Прежде всего напомним вид ряда Неймана для резольвенты

$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n .$$

Точно так же, как и в ТФКП, можно доказать, что для радиуса сходимости этого степенного ряда имеет место формула

$$r_0 = \limsup_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Причем при $|\lambda| > r_0$ ряд сходится, а при $|\lambda| < r_0$ расходится и на границе $|\lambda| = r_0$ имеет особенности. Поэтому

$$r(a) = r_0 = \limsup_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Доказательство-2.

Теперь докажем, что

$$r(a) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Имеют место вложения

$$(\sigma(a))^n = \sigma(a^n) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C}^1 : |\lambda| \leqslant \|a^n\|\right\}.$$

Значит,

$$r(a)^n \leqslant \|a^n\|,$$

$$r(a) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

Теорема доказана.

Спектральное разложение-1.

Пусть спектр $\sigma(a)$ можно разбить на замкнутые компоненты

$$\sigma(a) = \bigcup_{j=1}^{n} \sigma_j, \quad \text{distance}\{\sigma_j, \sigma_k\} > 0 \quad j \neq k.$$

Пусть $O(\sigma_j)$ — это окрестности спектральных компонент, причем

$$O(\sigma_j) \bigcap (\sigma \backslash \sigma_j) = \emptyset.$$

Выберем D так, чтобы $\sigma_j \subset D_j \subset O(\sigma_j)$ и рассмотрим интегралы Данфорда

$$P(\sigma_j) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_j} R(\lambda, a)\, d\lambda.$$

Спектральное разложение-2.

Оказывается, если $\mathcal{A}$ — банахова алгебра линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{B})$, то банахово пространство $\mathbb{B}$ разлагается в прямую сумму

$$\mathbb{B} = \oplus \sum_j P(\sigma_j)\mathbb{B}, \quad P(\sigma_j)P(\sigma_k) = 0, \quad j \neq k, \quad P(\sigma_j)^2 = P(\sigma_j).$$

Лекция 11. Гильбертовы пространства. Общая теория.

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

22 января 2012 г.

Определение гильбертова пространства.

Определение. *Гильбертовым пространством называется линейное пространство* $\mathbb{H}$, *в котором введено скалярное произведение, т. е. числовая функция* (x, y), *удовлетворяющая следующим условиям*:

1) $(x, \alpha y) = \alpha\,(x, y)$;
2) $(z, x + y) = (z, x) + (z, y)$;
3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
4) $(x, x) > 0$ *при* $x \neq 0$; $(x, x) = 0$ *при* $x = 0$,

и которое является полным пространством относительно расстояния $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$.



Неравенство Коши–Буняковского.

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)\,(y,y)\,.$$

□ Для доказательства этого утверждения рассмотрим выражение

$$(x+\alpha y, x+\alpha y) = (x,x) + \overline{\alpha}\,(x,y) + \alpha\,(y,x) + |\alpha|^2\,(y,y)\,,$$

По аксиоме 4 это выражение неотрицательно, каково бы ни было число α. Предполагая, что $(y,y) > 0$, положим

$$\alpha = -\frac{(x,y)}{(y,y)}.$$

На основе сказанного

$$(x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geqslant 0,$$

т. е.

$$(x,x)\,(y,y) - |(x,y)|^2 \geqslant 0.\boxtimes$$

Норма гильбертова пространства.

Проверим, что выражение

$$\|a\| \stackrel{def}{=} (a, a)^{1/2}$$

действительно норма в гильбертовом пространстве. Осталось проверить лишь то, что имеет место неравенство

$$\|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\|.$$

Действительно,

$$\|a + b\|^2 = (a + b, a + b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + (a, b) + (b, a) \leqslant$$
$$\leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2|(a, b)| \leqslant \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\| =$$
$$= (\|a\| + \|b\|)^2$$

Ортогональные элементы.

При изучении гильбертовых пространств важным является оказывается понятие ортогональности элементов.

Определение. *Элементы x и y гильбертова пространства $\mathbb{H}$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. При этом пишут $x \perp y$.*

Определение. *Если x ортогонален к каждому элементу множества $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$, то пишут, что $x \perp \mathcal{A}$.*

Определение. *Если элементы двух множеств $\mathcal{A}_1 \subset \mathbb{H}$ и $\mathcal{A}_2 \subset \mathbb{H}$ попарно ортогональны, то пишут, что $\mathcal{A}_1 \perp \mathcal{A}_2$.*

Определение. *Совокупность всех элементов, ортогональных данному множеству $\mathcal{E} \subset \mathbb{H}$, называется ортогональным дополнением множества $\mathcal{E}$ и обозначается $\mathcal{E}^{\perp}$.*

Утверждение. Каким бы ни было множество $\mathcal{E} \subset \mathbb{H}$, его ортогональное дополнение является подпространством пространства $\mathbb{H}$, т.е. линейным замкнутым множеством.



Равенство параллелограмма.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] \tag{1}$$

□ Имеет место цепочка равенств

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2+(x,y)+(y,x)-(x,y)-(y,x)$$



Теорема Беппо-Леви.

Теорема Беппо–Леви. Пусть $\mathbb{H}_1$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_2$ — его ортогональное дополнение. Каков бы ни был элемент $x \in \mathbb{H}$, его можно единственным образом представить в форме

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \mathbb{H}_1, \quad x_2 \in \mathbb{H}_2.$$

При этом элемент x_1 реализует расстояние от x до $\mathbb{H}_1$, т. е.

$$\|x - x_1\| = d(x, \mathbb{H}_1).$$

Доказательство теоремы Беппо-Леви-1.

Обозначим

$$d = d(x, \mathbb{H}_1) = \inf_{y \in \mathbb{H}_1} \|x - y\|$$

и найдем элементы $x_n \in \mathbb{H}_1$ так, что

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2} \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right] \qquad (2)$$

положив в нем

$$x \to x - x_n, \quad y \to x - x_m$$



Доказательство теоремы Беппо-Леви-2.

имеем

$$\|x_n - x_m\|^2 + \|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 2\left[\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2\right]. \quad (3)$$

А так как

$$\frac{x_m + x_n}{2} \in \mathbb{H},$$

то

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geqslant 4d^2.$$

Следовательно, из (3) с помощью (2) и этой оценки получаем

$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant 2\left[d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2}\right] - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Таким образом,

$$x_n \to x^* \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}$$

Доказательство теоремы Беппо-Леви-3.

В силу полноты пространства $\mathbb{H}$ существует

$$x^* = \lim_{n \to +\infty} x_n.$$

При этом $x^* \in \mathbb{H}_1$ (по замкнутости).
Переходя к пределу в выражении

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2} \quad n \in \mathbb{N},$$

найдем

$$\|x - x^*\| \leqslant d,$$

а так как для любого элемента из $\mathbb{H}_1$, в том числе и для x^*, должно быть $\|x - x^*\| \geqslant d$, то

$$\|x - x^*\| = d. \tag{4}$$



Доказательство теоремы Беппо-Леви-4.

Докажем теперь, что элемент $x^{**} = x - x^*$ ортогонален $\mathbb{H}_1$ и поэтому принадлежит $\mathbb{H}_2$. Возьмем отличный от нулевого элемент $y \in \mathbb{H}_1$. При любом λ имеем

$$x^* + \lambda y \in \mathbb{H}_1,$$

так что

$$\|x^{**} - \lambda y\|^2 = \|x - (x^* + \lambda y)\|^2 \geqslant d^2,$$

что можно переписать, используя

$$\|x - x^*\| = d,$$

в форме

$$-\lambda(x^{**}, y) - \overline{\lambda}(y, x^{**}) + |\lambda|^2(y, y)^2 + (x^{**}, x^{**}) \geqslant d^2,$$

поскольку $\|x^{**}\| = \|x - x^*\| = d$.



Доказательство теоремы Беппо-Леви-5.

Следовательно,

$$-\lambda(x^{**},y)-\overline{\lambda}(y,x^{**})+|\lambda|^2(y,y)^2\geqslant 0,$$

где положим

$$\lambda=\frac{\overline{(x^{**},y)}}{(y,y)}$$

и получим неравенство

$$-\frac{|(x^{**},y)|^2}{(y,y)}-\frac{|(x^{**},y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x^{**},y)|^2}{(y,y)}\geqslant 0,$$

т. е.

$$|(x^{**},y)|^2\leqslant 0,$$

что может быть лишь в случае $(x^{**},y)=0$, $x^{**}\perp y$.
Итак, возможность представления x в форме $x=x_1+x_2$ и соотношение $\|x-x_1\|=d(x,\mathbb{H}_1)$ установлены.

Доказательство теоремы Беппо-Леви-6.

Докажем теперь единственность представления. В самом деле, если

$$x = x_1^* + x_2^*, \quad x_1^* \in \mathbb{H}_1 \quad x_2^* \in \mathbb{H}_2,$$

то, сопоставляя это с представлением $x = x_1 + x_2$, получим

$$x_1 - x_1^* = x_2^* - x_2.$$

Элемент, стоящий в левой части этого равенства, принадлежит $\mathbb{H}_1$, а в правой части — $\mathbb{H}_2$, поэтому

$$x_1 - x_1^* \perp x_2^* - x_2,$$

откуда получаем

$$x_1 - x_1^* = x_2^* - x_2 = 0.$$

Теорема доказана.



Разложение по базису.

Определение. *Система гильбертова пространства* $\mathbb{H}$ *называется полной в* $\mathbb{H}$, *если единственным элементом, ортогональным данной системе, является нулевой элемент.*

Определение. *Гильбертово пространство* $\mathbb{H}$ *называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное множество, т. е. такое множество, замыкание которого по метрике* $\mathbb{H}$ *совпадает со всем пространством* $\mathbb{H}$.

Теорема

В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ *всякая полная ортонормированная система* $\{\varphi_n\}$ *является базисом, т. е. для любого* $f \in \mathbb{H}$ *имеет место разложение*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\, \varphi_n, \ \text{причём}\ \|f\| = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 .$$

Доказательство теоремы-1.

Докажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2$$

сходится. Составим вектор

$$g = \sum_{n=1}^{p} (f, \varphi_n)\, \varphi_n,$$

пусть $f = g + h$, где h подлежит определению. Вектор h ортогонален любому из векторов $\varphi_1, ..., \varphi_p$ и, следовательно, и их линейной оболочке. Действительно,

$$(h, \varphi_i) = (f, \varphi_i) - (g, \varphi_i) = (f, \varphi_i) - \left(\sum_{n=1}^{p} (f, \varphi_n) \varphi_n, \varphi_i \right) =$$

$$= (f, \varphi_i) - (f, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2, ..., p.$$

Доказательство теоремы-2.

По теореме Пифагора

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2 = \sum_{n=1}^{p} |(f, \varphi_n)|^2 + \|h\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{p} |(f, \varphi_n)|^2 .$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{p} |(f, \varphi_n)|^2 \leqslant \|f\|^2$$

при любом p. Переходя к пределу при $p \to +\infty$, получим так называемое неравенство Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Доказательство теоремы-3.

Положим теперь $(f, \varphi_n) = \xi_n$. Пусть $s_p = \sum\limits_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n$. Тогда

$$\|s_p - s_q\|^2 = \sum_{n=p+1}^{q} |\xi_n|^2, \quad q > p.$$

При $p \to +\infty$ эта величина стремится к нулю вследствие сходимости ряда из чисел $|\xi_n|^2$. Поэтому последовательность $\{s_p\}$ фундаментальна и в силу полноты $\mathcal{H}$ сходится:

$$\lim_{p \to +\infty} s_p = s \in \mathcal{H}.$$

Доказательство теоремы-4.

Покажем, что $s = f$. Для этого заметим, что при фиксированном k и для всех $p > k$ справедливо соотношение

$$(s, \varphi_k) = \lim_{p \to +\infty} (s_p, \varphi_k) = \lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n, \varphi_k \right) = \xi_k = (f, \varphi_k).$$

Поэтому для любого k имеем, что $(f - s, \varphi_k) = 0$; так как система $\{\varphi_n\}$ полна, то $f = s$, т. е.

$$f = \lim_{p \to +\infty} s_p = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n.$$

Доказательство теоремы-5.

В силу непрерывности скалярного произведения получаем

$$\|f\|^2 = (\lim_{p\to+\infty} s_p, \lim_{p\to+\infty} s_p) = \lim_{p\to+\infty} (s_p, s_p) =$$

$$= \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} |\xi_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2.$$

Теорема доказана.

Лемма Рисса–Фреше.

Пусть $\mathbb{H}$ гильбертово пространство с сопряженным $\mathbb{H}^*$. Справедлива следующая важная теорема.

Теорема

Для всякого $t \in \mathbb{H}^*$ существует единственный элемент $y_t \in \mathbb{H}$, такой, что

$$\langle t, x \rangle = (y_t, x)$$

для всех $x \in \mathbb{H}$. Кроме того, $\|y_t\|_{\mathbb{H}} = \|t\|_{\mathbb{H}^*}$, где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначены скобки двойственности между $\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}^*$.

Замечание. Обратно, всякий элемент $y \in \mathbb{H}$ задаёт непрерывный линейный функционал t_y по формуле $\langle t_y, x \rangle = (y, x)$.

Доказательство-1.

Пусть

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{H} : \langle t, x \rangle = 0\}$$

В силу непрерывности t множество $\mathcal{N}$ есть замкнутое подпространство.

Если $\mathcal{N} = \mathcal{H}$, то

$$\langle t, x \rangle = 0 = (\theta, x)$$

для всех x и доказательство закончено.

Доказательство-2.

Поэтому допустим, что

$$\mathcal{N} \neq \mathbb{H}.$$

Тогда, в силу теоремы Беппо–Леви существует $x_0 \neq \theta$:

$$x_0 \in \mathcal{N}^{\perp}.$$

Положим

$$y_t = \overline{\langle t, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Покажем, что y_t обладает нужными свойствами.

Доказательство-3.

Во-первых, если $x \in \mathcal{N}$, то $\langle t, x\rangle = 0 = (y_t, x)$. Далее, если $x = \alpha x_0$, то

$$\langle t, x\rangle = \langle t, \alpha x_0\rangle = \alpha\langle t, x_0\rangle = \left(\overline{\langle t, x_0\rangle}\|x_0\|^{-2}x_0, \alpha x_0\right) = (y_t, \alpha x_0).$$

Каждый элемент $x \in \mathbb{H}$ может быть записан в виде

$$x = \left(x - \frac{\langle t, x\rangle}{\langle t, x_0\rangle}x_0\right) + \frac{\langle t, x\rangle}{\langle t, x_0\rangle}x_0.$$

Значит,

$$\langle t, x\rangle = (y_t, x), \quad y_t = \overline{\langle t, x_0\rangle}\frac{x_0}{\|x_0\|^2}$$

для всех $x \in \mathbb{H}$.



Доказательство-4.

Для доказательства равенства $\|y_t\|_{\mathbb{H}} = \|t\|_{\mathbb{H}^*}$ заметим, что

$$\|t\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle t, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(y_t, x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|y_t\| \|x\| = \|y_t\|$$

и

$$\|t\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle t, x \rangle| \geqslant \left| \left\langle t, \frac{y_t}{\|y_t\|} \right\rangle \right| = \left(y_t, \frac{y_t}{\|y_t\|} \right) = \|y_t\|.$$

Теорема доказана.

Отображение в лемме Рисса–Фреше.

Рассмотрим отображение Рисса–Фреше

$$RF : t \in \mathbb{H}^* \to y_t \in \mathbb{H},$$

определенное явной формулой

$$y_t = \overline{\langle t, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2}.$$

Из его вида ясно, что оно обладает свойством антилинейности

$$y_{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2} = \overline{\langle \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2} =$$

$$= \overline{\lambda_1} \overline{\langle t_1, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2} + \overline{\lambda_2} \overline{\langle t_2, x_0 \rangle} \frac{x_0}{\|x_0\|^2} = \overline{\lambda_1} y_{t_1} + \overline{\lambda_2} y_{t_2}.$$

Полуторалинейные формы.

Определение. Полуторалинейной формой $B(x, y)$ называется функция двух переменных

$$B(x, y) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}^1$$

линейная по первому аргументу и антилинейная по второму аргументу:

$$B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 B(x, y_1) + \lambda_2 B(x, y_2),$$

$$B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \overline{\lambda_1} B(x_1, y) + \overline{\lambda_2} B(x_2, y).$$

Лемма о представлении полуторалинейной формы.

Лемма

Пусть полуторалинейная форма $B(x, y)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|B(x, y)| \leqslant c\|x\|\|y\| \quad \textit{для всех} \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

(Такая полуторалинейная форма называется ограниченной.) Тогда существует такой оператор $\mathbb{A} \in \mathfrak{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, *что имеет место представление*

$$B(x, y) = (\mathbb{A}x, y).$$

Доказательство.

В силу условия в лемме для всякого фиксированного $x \in \mathbb{H}$ отображение

$$y \to B(x, y)$$

является линейным и непрерывным функционалом. Значит в силу леммы Рисса–Фреше найдется такой вектор $\mathbb{A}(x)$, что

$$(\mathbb{A}(x), y) = B(x, y),$$

причем отображение

$$\mathbb{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

является линейным в силу антилинейности формы $B(x, y)$ по x и антилинейности скалярного произведения (x, y) по x.

Теперь имеет место следующая цепочка выражений:

$$\|\mathbb{A}(x)\| = \sup_{\|y\|=1} |(\mathbb{A}(x), y)| = \sup_{\|y\|=1} |B(x, y)| \leqslant c_1 \sup_{\|y\|=1} \|x\|\|y\| \leqslant c_1\|x\|.$$

Лемма об обратимости оператора в представлении формы.

Лемма

Пусть полуторалинейная форма $B(x, y)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|B(x, y)| \leqslant c\|x\|\|y\| \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{H}.$$

Пусть, кроме того, имеет место свойство коэрцитивности полуторалинейной формы

$$B(x, x) \geqslant m\|x\|^2$$

Тогда оператор $\mathbb{A} \in \mathfrak{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ *из предыдущей леммы обладает обратным* $\mathbb{A}^{-1}$, *причем*

$$\|\mathbb{A}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m}.$$

Транспонированный и сопряженный операторы.

Пусть $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_2$ — два гильбертовых пространства с сопряженными $\mathbb{H}_1^*$ и $\mathbb{H}_2^*$, со скобками двойственности

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1, \quad \langle\cdot,\cdot\rangle_1$$

и со скалярными произведениями

$$(\cdot,\cdot)_1, \quad (\cdot,\cdot)_2.$$

Пусть задан оператор $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$. Напомним определение транспонированного оператора $\mathbb{T}^t \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_2^*, \mathbb{H}_1^*)$:

$$\langle \mathbb{T}^t f, u\rangle_1 = \langle f, \mathbb{T}u\rangle_2 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{H}_1, \quad f \in \mathbb{H}_2^*.$$

Теперь введем сопряженный оператор $\mathbb{T}^* \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_2, \mathbb{H}_1)$:

$$(\mathbb{T}^* f, u)_1 = (f, \mathbb{T}u)_2 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{H}_1, \quad f \in \mathbb{H}_2.$$



Пространство $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}^2(\Omega)$ имеет вид

$$(f, g) = \int\limits_{\Omega} \overline{f(x)} g(x)\, dx,$$

а скобки двойственности имеют вид

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_{\Omega} f(x) g(x)\, dx.$$

Поэтому оператор Рисса–Фреше имеет вид

$$RF(f) = \overline{f}.$$

Ясно, что это антилинейное отображение.



Связь транспонированного и сопряженного операторов.

Если ввести в соответствии с леммой Рисса–Фреше соответствующие операторы Рисса–Фреше:

$$RF_1 : \mathbb{H}_1^* \to \mathbb{H}_1, \quad RF_2 : \mathbb{H}_2^* \to \mathbb{H}_2,$$

то связь между транспонированным оператором $\mathbb{T}^t$ и сопряженным оператором $\mathbb{T}^*$ будет следующая:

$$\mathbb{T}^* = RF_1 \mathbb{T}^t RF_2^{-1}.$$

Поскольку по доказанному операторы Рисса–Фреше являются изометрическими изоморфизмами, то согласно доказанному ранее равенству норм

$$\|\mathbb{T}^t\| = \|\mathbb{T}\|$$

получим, что

$$\|\mathbb{T}^*\| = \|\mathbb{T}\|,$$

где символом $\|\cdot\|$ мы обозначаем РАЗЛИЧНЫЕ операторные нормы!!!

Доказательство равенства норм.

Итак, имеют место два равенства

$$\mathbb{T}^* = RF_1 \mathbb{T}^t RF_2^{-1}, \quad RF_1^{-1} \mathbb{T}^* RF_2 = \mathbb{T}^t.$$

Из первого равенства получим, что

$$\|\mathbb{T}^*\| \leqslant \|\mathbb{T}^t\| = \|\mathbb{T}\|.$$

Из второго получим следующее неравенство:

$$\|\mathbb{T}\| = \|\mathbb{T}^t\| \leqslant \|\mathbb{T}^*\|.$$

Пояснения на доске!

Свойства сопряженных операторов.

Равенство нормы исходного оператора и сопряженного оператора нами уже доказано. Кроме того, имеет место свойства антилинейности операции сопряжения

$$(\alpha_1 \mathbb{T}_1 + \alpha_2 \mathbb{T}_2)^* = \overline{\alpha_1} \mathbb{T}_1^* + \overline{\alpha_2} \mathbb{T}_2^*.$$

Наконец, докажем, что $\mathbb{T}^{**} = \mathbb{T}$. Действительно,

$$(f, \mathbb{T}u)_2 = (\mathbb{T}^* f, u)_1 = \overline{(u, \mathbb{T}^* f)_1} = \overline{(\mathbb{T}^{**} u, f)_2} = (f, \mathbb{T}^{**} u)_2.$$

Самосопряженный оператор.

Определение. Оператор $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ называется самосопряженным, если имеет место равенство

$$\mathbb{T}^* = \mathbb{T}.$$

Лемма

Пусть $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ — это самосопряженный и неотрицательный оператор, т. е. удовлетворяющий свойству

$$(x, \mathbb{T}x) \geqslant 0 \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathbb{H}.$$

Тогда имеет место неравенство типа Коши–Буняковского

$$|(x, \mathbb{T}y)| \leqslant (x, \mathbb{T}x)^{1/2}(y, \mathbb{T}y)^{1/2}.$$

(Если при $x \neq \theta$ $Tx \neq \theta$, то (x, Tx) обладает всеми свойствами скалярного произведения.)

Доказательство.

Имеет место следующая цепочка выражений:

$$(x - \lambda y, \mathbb{T}(x - \lambda y)) = (x, \mathbb{T}x) + |\lambda|^2 (y, \mathbb{T}y) - \lambda (x, \mathbb{T}y) - \overline{\lambda} (y, \mathbb{T}x).$$

Пусть

$$\lambda = \frac{\overline{(x, \mathbb{T}y)}}{(y, \mathbb{T}y)}.$$

После подстановки получим, что

$$(x, \mathbb{T}x) + \frac{|(x, \mathbb{T}y)|^2}{(y, \mathbb{T}y)} - \frac{|(x, \mathbb{T}y)|^2}{(y, \mathbb{T}y)} - \frac{(x, \mathbb{T}y)(y, \mathbb{T}x)}{(y, \mathbb{T}y)} \geqslant 0,$$

из которого с учетом самосопряженности оператора $\mathbb{T}$ получим

$$(x, \mathbb{T}x) - \frac{|(x, \mathbb{T}y)|^2}{(y, \mathbb{T}y)} \geqslant 0.$$

Отсюда и вытекает неравенство.



Лемма о спектре самосопряженного, ограниченного оператора.

Лемма

Спектр самосопряженного, ограниченного оператора лежит на действительной оси.

(Заметим, что доказать лишь вещественность собственных значений самосопряженного оператора недостаточно.)

Доказательство-1.

Для всех $x \in \mathbb{H}$ и $\beta \in \mathbb{R}^1$ имеет место цепочка выражений

$$\|(A + i\beta \cdot \mathrm{id})x\|^2 = \|Ax\|^2 + \beta^2\|x\|^2 + \\ + i\beta(Ax, x) - i\beta(x, Ax) = \|Ax\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geqslant \beta^2\|x\|^2,$$

поскольку

$$(x, Ax) = (Ax, x).$$

Доказательство-2.

Пусть

$$\mathbb{H}_0 = \mathrm{Im}(A + i\beta \cdot \mathrm{id}), \quad \mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}.$$

Докажем, что $\mathbb{H}_0$ замкнуто. Пусть $\{y_n\} \subset \mathbb{H}_0$ и

$$y_n \longrightarrow y_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}_0.$$

Докажем, что $y_0 \in \mathbb{H}_0$. Действительно, имеем

$$y_n = (A + i\beta \cdot \mathrm{id})x_n, \quad \|y_{n+m} - y_n\| \geqslant \beta\|x_{n+m} - x_n\|.$$

Значит,

$$x_n \longrightarrow x_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{H}$$

и поэтому

$$y_0 = (A + i\beta \cdot \mathrm{id})x_0 \Rightarrow y_0 \in \mathbb{H}_0.$$



Доказательство-3.

Докажем, что $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}$. Пусть нет. Тогда найдется

$$z \in \mathbb{H}_0^{\perp}, \quad \|z\| = 1.$$

Итак, имеет место цепочка равенств

$$0 = (z, (A + i\beta \cdot \mathrm{id})z) = (z, Az) + i\beta\|z\|^2,$$

Значит,

$$0 = \mathrm{im}(z, (A + i\beta \cdot \mathrm{id})z) = \beta\|z\|^2 = \beta$$

Противоречие. Значит, $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}$.

Доказательство-4.

Итак, имеем

$$\operatorname{Im}(A + i\beta \cdot \mathrm{id}) = \mathbb{H}, \quad \operatorname{Ker}(A + i\beta \cdot \mathrm{id}) = 0.$$

Значит, для оператора $A + i\beta \cdot \mathrm{id}$ при $\beta \in \mathbb{R}^1$ в силу теоремы Банаха определен обратный. Заменой,

$$A \to A + \lambda_0 \cdot \mathrm{id} \quad \text{при} \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}^1,$$

Получим, что любой оператор вида

$$A + (\lambda_0 + i\beta) \cdot \mathrm{id}$$

обратим при $\beta \neq 0$ для всех $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$. Следовательно,

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}^1.$$



Теорема о спектре.

Введем обозначения.

$$m_- = \inf\left\{(x, Ax) :\ \|x\| = 1\right\}, \quad m_+ = \sup\left\{(x, Ax) :\ \|x\| = 1\right\}.$$

Теорема

$\sigma(A) \subset [m_-, m_+]$, $m_-, m_+ \in \sigma(A)$.

Доказательство-1.

Итак, пусть $\lambda > m_+$. Тогда

$$(x, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x) \geqslant (\lambda - m_+)\|x\|^2.$$

Значит, форма

$$(y, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x)$$

коэрцитивна и поэтому оператор

$$\lambda \cdot \mathrm{id} - A$$

обратим. Аналогично при $\lambda < m_-$ имеем

$$(x, (\lambda \cdot \mathrm{id} - A)x) \geqslant (m_- - \lambda)\|x\|^2$$

И, стало быть, оператор

$$\lambda \cdot \mathrm{id} - A$$

обратим при $\lambda < m_-$.



Доказательство-2.

Докажем, что $m_\pm \in \sigma(A)$. Пусть $\{x_n\}$ такая последовательность, что

$$\|x_n\| = 1, \quad (x_n, Ax_n) \to m_-.$$

Пусть

$$x = x_n, \quad y = (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n, \quad B = A - m_- \cdot \mathrm{id}.$$

Оператор B — неотрицателен. $\square$

$$(x, Bx) = (x, Ax) - m_-(x, x).$$

Но

$$(x, Ax) \geqslant m_- \quad \text{при} \quad \|x\| = 1.$$



Доказательство-3.

$$|(x, By)|^2 \leqslant (x, Bx)(y, By).$$

$$(x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})^2 x_n) =$$
$$= ((A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n) = \|(A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\|^2.$$

Поэтому получим неравенство

$$\|(A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n\|^4 \leqslant$$
$$\leqslant (x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n)((A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})^2 x_n) \leqslant$$
$$\leqslant (x_n, (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n)\|A - m_- \cdot \mathrm{id}\|^3 \to 0$$

при $n \to +\infty$.



Доказательство-4.

Итак, мы нашли такую последовательность $\{x_n\}$, что

$$\|x_n\| = 1, \quad y_n = (A - m_- \cdot \mathrm{id})x_n \to 0$$

при $n \to +\infty$. Пусть при этом

$$m_- \notin \sigma(A) \Rightarrow m_- \in \mathrm{res}(A)$$

$$x_n = R(m_-, A)y_n \Rightarrow 1 = \|x_n\| \leqslant \|R(m_-, A)\|\|y_n\| \to 0.$$

Противоречие. Значит, $m_- \in \sigma(A)$. Аналогичным образом рассмотрим

$$\|x_n\| = 1, \quad (x_n, Ax_n) \to m_+, \quad B = m_+ \cdot \mathrm{id} - A.$$

Теорема доказана.



О норме самосопряженного оператора.

Лемма

Пусть оператор $\mathbb{A}$ является самосопряженным, тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, Ax)|.$$

Доказательство-1.

Пусть

$$M = \sup_{\|x\|=1} |(x, Ax)|.$$

Справедлива цепочка неравенств

$$|(x, Ax)| \leqslant \|x\| \|Ax\| \leqslant \|x\|^2 \|A\| \leqslant \|A\|.$$

Значит,

$$M \leqslant \|A\|.$$

$$((x+y), A(x+y)) - ((x-y), A(x-y)) =$$
$$= 2(x, Ay) + 2(y, Ax) = 2[(x, Ay) + \overline{(x, Ay)}] = 4\,\mathrm{Re}(x, Ay).$$

Доказательство-2.

Поэтому

$$\mathrm{Re}(x, Ay) = \frac{1}{4}\left[((x+y), A(x+y)) - ((x-y), A(x-y))\right] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{4}\left[\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2\right] = \frac{M}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right].$$

Положим в этом неравенстве

$$x = \frac{Ay}{\|Ay\|}$$

и получим неравенство

$$\|Ay\| \leqslant \frac{M}{2}\left[1 + \|y\|^2\right] \leqslant M \quad \text{при} \quad \|y\| = 1.$$

Итак,

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \leqslant M \Rightarrow \|A\| = \sup_{\|y\|=1} |(y, Ay)|.$$

Лемма.

Лемма

Пусть A — самосопряженный ограниченный оператор, тогда

$$\|A^2\| = \|A\|^2.$$



$$\|A^2\| = \sup_{\|x\|=1} |(x, A^2x)| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, Ax)| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2.$$



Спектральный радиус самосопряженного оператора.

Лемма

Пусть A — самосопряженный, ограниченный оператор. Тогда

$$r(A) = \|A\|.$$



$$r(A) = \lim_{n\to+\infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{2n\to+\infty} \|A^{2n}\|^{1/(2n)} = \lim_{2n\to+\infty} \|A\| = \|A\|.$$



Лекция 9. Банаховы пространства. Транспонированный оператор и плотные вложения банаховых пространств.

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

29 октября 2011 г.

Обозначения.

Пусть заданы два банаховых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ с нормами

$$\| \quad \|_e \quad \text{и} \quad \| \quad \|_f$$

и с соответствующими сопряженными $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{F}^*$ относительно скобок двойственности:

$$\langle e^*, e\rangle_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad e^* \in \mathbb{E}^*$$

и

$$\langle f^*, f\rangle_f \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{F} \quad \text{и} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Введем стандартным образом скобки двойственности между парами банаховых пространств $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{E}^{**}$, а также $\mathbb{F}^*$ и $\mathbb{F}^{**}$:

$$\langle e^{**}, e^*\rangle_{e*} \quad \text{для всех} \quad e^* \in \mathbb{E}^* \quad \text{и} \quad e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$$

и

$$\langle f^{**}, f^*\rangle_{f*} \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^* \quad \text{и} \quad f^{**} \in \mathbb{F}^{**}.$$

Норма оператора.

Пусть $\mathbb{T} \in \mathfrak{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

$$\|\mathbb{T}\|_{e\to f} \equiv \sup_{\|e\|_e=1} \|\mathbb{T}e\|_f .$$

Лемма

Для произвольного оператора $\mathbb{T} \in \mathfrak{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ *имеет место неравенство*:

$$\|\mathbb{T}e\|_f \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e\to f}\|e\|_e \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Транспонированный оператор.

Определение. *Оператором, транспонированным к* $\mathbb{T}$, *называется оператор*

$$\mathbb{T}^t : \mathbb{F}^* \longrightarrow \mathbb{E}^*, \qquad (1)$$

определяемый следующим образом:

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e \equiv \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f \,. \qquad (2)$$

Пояснить корректность на доске.

Теорема о норме транспонированного оператора.

Теорема

Если $\mathbb{T} \in \mathfrak{L}\left(\mathbb{E}, \mathbb{F}\right)$, *то* $\mathbb{T}^t \in \mathfrak{L}\left(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*\right)$. *Причем*

$$\|\mathbb{T}\|_{e \to f} = \|\mathbb{T}^t\|_{f^* \to e^*}.$$

Доказательство-1.

Прежде всего опишем как определяется норма в, очевидно, банаховом пространстве $\mathcal{L}\left(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*\right)$. Действительно, имеем

$$\|\mathbb{A}\|_{f^* \to e^*} \equiv \sup_{\|f^*\|_{f*}=1} \|\mathbb{A} f^*\|_{e*},$$

где нормы в сопряженных пространствах $\mathbb{E}^*$ и $\mathbb{F}^*$ определяются стандартным образом, т. е.

$$\|e^*\|_{e*} \equiv \sup_{\|e\|_e=1} |\langle e^*, e\rangle_e| \quad \text{и} \quad \|f^*\|_{f*} \equiv \sup_{\|f\|_f=1} |\langle f^*, f\rangle_f| .$$

Доказательство-2.

Докажем сначала линейность оператора $\mathbb{T}^t$. Действительно, имеем следующую цепочку равенств

$$\left\langle \mathbb{T}^t \left(\alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^*\right), e\right\rangle_e \equiv \left\langle \left(\alpha_1 f_1^* + \alpha_2 f_2^*\right), \mathbb{T}e\right\rangle_f =$$
$$= \alpha_1 \left\langle f_1, \mathbb{T}e\right\rangle_f + \alpha_2 \left\langle f_2, \mathbb{T}e\right\rangle_f = \alpha_1 \left\langle \mathbb{T}^t f_1, e\right\rangle_e + \alpha_2 \left\langle \mathbb{T}^t f_2, e\right\rangle_e =$$
$$= \left\langle \alpha_1 \mathbb{T}^t f_1 + \alpha_2 \mathbb{T}^t f_2, e\right\rangle_e, \quad \text{для всех} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \quad \text{и} \quad f_1, f_2 \in \mathbb{F}.$$

Докажем теперь ограниченность оператора $\mathbb{T}^t$. Действительно, в силу лемм 1 и 10 имеем

$$\left|\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e\right\rangle_e\right| = \left|\left\langle f^*, \mathbb{T}e\right\rangle_f\right| \leqslant \|f^*\|_{f*}\|\mathbb{T}e\|_f \leqslant \|f^*\|_{f*}\|\mathbb{T}\|_{e\to f}\|e\|_e. \tag{3}$$

Доказательство-3.

Теперь из определения нормы в банаховом пространстве следует, что

$$\|\mathbb{T}^t\|_{f^*\to e^*} \equiv \sup_{\|f^*\|_{f*}=1} \|\mathbb{T}^t f^*\|_{e*} = \sup_{\|f^*\|_{f*}=1} \sup_{\|e\|_e=1} \left|\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e\right\rangle_e\right|. \tag{4}$$

Без ограничения общности можно считать, что в неравенстве (3) $f^* \neq \theta$ и $e \neq \theta$. Тогда из (3) получим неравенство

$$\left|\left\langle \mathbb{T}^t \frac{f^*}{\|f^*\|_{f*}}, \frac{e}{\|e\|_e} \right\rangle_e\right| \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e\to f}.$$

Отсюда и из (4) вытекает неравенство

$$\|\mathbb{T}^t\|_{f^*\to e^*} \leqslant \|\mathbb{T}\|_{e\to f}. \tag{5}$$

Отсюда вытекает ограниченность оператора $\mathbb{T}^t$. Стало быть, $\mathbb{T}^t \in \mathcal{L}\left(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*\right)$.

Доказательство-4.

Докажем теперь, что имеет место неравенство

$$\|\mathbb{T}\|_{e\to f} \leqslant \|\mathbb{T}^t\|_{f^*\to e^*}. \tag{6}$$

Действительно, поскольку $\mathbb{T}^t \in \mathcal{L}\left(\mathbb{F}^*, \mathbb{E}^*\right)$, то в силу лемм 1 и 10 имеет место цепочка выражений

$$\left|\langle f^*, \mathbb{T}e\rangle_f\right| = \left|\langle \mathbb{T}^t f^*, e\rangle_e\right| \leqslant \|\mathbb{T}^t f^*\|_{e*}\|e\|_e \leqslant \|\mathbb{T}^t\|_{f^*\to e^*}\|f^*\|_{f*}\|e\|_e. \tag{7}$$

Теперь по определению нормы в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ имеем цепочку равенств

$$\|\mathbb{T}\|_{e\to f} \equiv \sup_{\|e\|_e=1} \|\mathbb{T}e\|_f = \sup_{\|e\|_e=1} \sup_{\|f^*\|_{f*}=1} \left|\langle f^*, \mathbb{T}e\rangle_f\right|. \tag{8}$$

Без ограничения общности можно считать, что $e \neq \theta$ и $f^* \neq \theta$.

Доказательство-5.

Тогда из (7) получим неравенство

$$\left|\left\langle \frac{f^*}{\|f^*\|_{f*}}, \mathbb{T}\frac{e}{\|e\|_e}\right\rangle_f\right| \leqslant \|\mathbb{T}^t\|_{f^*\to e^*}.$$

Отсюда и из равенства (8) получим неравенство (6), из которого и из (5) получаем второе утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Оператор $\mathbb{T} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ является инъективным, если из условия $\mathbb{T}e = 0$ вытекает, что $e = \theta$.

Оператор $\mathbb{T}$ является не инъективным в том случае, если существует такой элемент $\overline{e} \neq \theta$, что $\mathbb{T}\overline{e} = \vartheta$.

По определению оператора $\mathbb{T}^t$ имеет место равенство

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, \overline{e} \right\rangle_e = \left\langle f^*, \mathbb{T}\overline{e} \right\rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*. \qquad (9)$$

Определение. *Множество* $\mathrm{A}^* \subset \mathbb{E}^*$ *называется ортогональным ко множеству* $\mathrm{A} \subset \mathbb{E}$ *относительно скобок двойственности между этими банаховыми пространствами, если*

$$\langle a^*, a \rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad a \in \mathrm{A} \quad \textit{и} \quad a^* \in \mathrm{A}^*.$$

Свойства-1.

Пусть теперь $\{f_n^*\} \subset \mathbb{F}^*$ — это сильно сходящаяся к некоторому элементу $f^* \in \mathbb{F}^*$ последовательность, т.е.

$$\|f_n^* - f^*\|_{f*} = \sup_{\|f\|_f=1} |\langle f_n^* - f^*, f\rangle_f| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда из равенства (9) получим, что

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f_n^*, \bar{e} \right\rangle_e \to \left\langle \mathbb{T}^t f^*, \bar{e} \right\rangle_e = 0.$$

Тем самым мы получаем, что замыкание множества $\left\{\mathbb{T}^t \mathbb{F}^*\right\}$ не совпадает с $\mathbb{E}^*$, т. е. множество $\left\{\mathbb{T}^t \mathbb{F}^*\right\}$ не плотно в $\mathbb{E}^*$.



Свойства-2.

Заметим, что имеет место обратное утверждение: если множество $\{\mathbb{T}^t \mathbb{F}^*\}$ плотно в $\mathbb{E}^*$, то оператор $\mathbb{T}$ инъективен. Действительно, пусть

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*,$$

следовательно, в силу плотности множества $\{\mathbb{T}^t \mathbb{F}^*\}$ в $\mathbb{E}^*$ получаем, что $e = \theta$. С другой стороны, имеем

$$\langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*.$$

Стало быть, $\mathbb{T}e = \theta$. Значит, приходим к выводу, что из условия $\mathbb{T}e = \theta$ вытекает $e = \theta$.



Операторы топологического вложения.

Теперь рассмотрим частный случай операторов из банахова пространства $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, а именно линейный, непрерывный и инъективный оператор

$$\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}.$$

Во-первых, этот оператор линейный, т. е.

$$\mathbb{J}_{ef}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 \mathbb{J}_{ef} e_1 + \alpha_2 \mathbb{J}_{ef} e_2 \ \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1 \text{ и } e_1, e_2 \in \mathbb{E}.$$

Во-вторых, этот оператор непрерывный, т. е. в силу линейности — ограниченный

$$\|\mathbb{J}_{ef} e\|_f \leqslant c_1 \|e\|_e.$$

Далее мы будем использовать следующее обозначение:

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}.$$



Теорема о транспонированном операторе.

Теорема

Пусть $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *— это два банаховых пространства и* $\mathbb{T} \in \mathfrak{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. *Тогда имеют место следующие утверждения*

(i) $\mathbb{T}(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow \mathbb{T}^t$ *— является инъективным;*

(ii) $\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^* \Rightarrow \mathbb{T}$ *— является инъективным, причем имеет место обратное утверждение при условии, что* $\mathbb{E}$ *рефлексивно.*

Доказательство утверждения (i)-1.

Итак, пусть $\mathbb{T}^t f^* = 0$, тогда для всех $e \in \mathbb{E}$ имеем равенства

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f ,$$

но тогда в силу плотности $\mathbb{TE}$ в $\mathbb{F}$ получаем, что единственным продолжением функционала f^* ортогонального $\mathbb{TE}$ является функционал ортогональный всему пространству $\mathbb{F}$, стало быть, $f^* = \theta$.

Доказательство утверждения (i)-2.

Докажем теперь утверждение в другую сторону.

Пусть $\mathbb{T}^t$ инъективен. Докажем, что если $f^* \in \mathbb{F}^*$ есть нуль на $\mathbb{T}\mathbb{E}$, то f^* есть нуль на $\mathbb{F}$.

Откуда и следует в силу теоремы Хана–Банаха плотность множества $\mathbb{T}\mathbb{E}$ в $\mathbb{F}$.

Доказательство утверждения (i)-3.

Действительно, равенство

$$\langle f^*, f \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{T}\mathbb{E}$$

эквивалентно равенству

$$\langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Но последнее равенство равно в силу определения $\mathbb{T}^t$ равно

$$\left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = 0 \quad \text{для всех} \quad e \in \mathbb{E}.$$

Отсюда сразу же получаем, что $\mathbb{T}^t f^* = \theta$. Откуда в силу инъективности $\mathbb{T}^t$ приходим к выводу, что $f^* = \theta$. Значит,

$$\mathbb{T}(\mathbb{E}) \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}.$$

Пояснить на доске.



Доказательство утверждения (ii)-1.

Итак, пусть

$$\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*$$

и $\mathbb{T}e = 0$. Тогда из равенства

$$0 = \left\langle \mathbb{T}^t f^*, e \right\rangle_e = \langle f^*, \mathbb{T}e \rangle_f \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{F}^*$$

получаем, что $e \in \mathbb{E}$ ортогонально всему пространству $\mathbb{E}^*$, а значит, $e = \theta$.

Доказательство утверждения (ii)-2.

Пусть теперь $\mathbb{T}$ является инъективным.

Попробуем доказать требуемое утверждение как и на шаге (i).

Итак, надо доказать, что функционал $e^{**} \in \mathbb{E}^{**}$ равный нулю на $\mathbb{T}^t\mathbb{F}^*$ равен нулю и на всем $\mathbb{E}^*$, откуда в силу теоремы Хана–Банаха получим требуемый результат.

Пояснить на доске.

Доказательство утверждения (ii)-3.

Пусть имеет место равенство

$$\langle e^{**}, e^{*} \rangle_{e*} = 0 \quad \text{для всех} \quad e^{*} \in \mathbb{T}^{t}\mathbb{F}^{*},$$

которое эквивалентно

$$\left\langle e^{**}, \mathbb{T}^{t} f^{*} \right\rangle_{e*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^{*} \in \mathbb{F}^{*}.$$

Но последнее выражение равно

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} e^{**}, f^{*} \right\rangle_{f*} = 0 \quad \text{для всех} \quad f^{*} \in \mathbb{F}^{*},$$

где $\mathbb{T}^{tt}$ — есть транспонированный к $\mathbb{T}^{t}$. Из последнего равенства сразу же получаем, что

$$\mathbb{T}^{tt} e^{**} = \theta.$$

И тут мы сталкиваемся с трудностью: **из инъективности оператора $\mathbb{T}$, вообще говоря, не следует инъективность оператора $\mathbb{T}^{tt}$.**

Доказательство утверждения (ii)-4.

Поэтому нужно изучить явное представление оператора $\mathbb{T}^{tt}$ через оператор $\mathbb{T}$.

Рассмотрим транспонированный оператор $\mathbb{T}^{tt}$ к оператору $\mathbb{T}^{t}$.

Действительно, по определению имеем

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} e^{**}, f^{*} \right\rangle_{f*} = \left\langle e^{**}, \mathbb{T}^{t} f^{*} \right\rangle_{e*} \quad \forall \quad e^{**} \in \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad f^{*} \in \mathbb{F}^{*}. \tag{10}$$

С учетом того, что имеет изометрически изоморфные вложения

$$\mathbb{J}_e : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^{**} \quad \text{и} \quad \mathbb{J}_f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}^{**}$$

мы можем переписать (10) в следующем виде

$$\left\langle \mathbb{T}^{tt} \mathbb{J}_e e, f^{*} \right\rangle_{f*} = \left\langle \mathbb{J}_e e, \mathbb{T}^{t} f^{*} \right\rangle_{e*}. \tag{11}$$

С другой стороны, имеем равенства

$$\left\langle \mathbb{J}_e e, \mathbb{T}^{t} f^{*} \right\rangle_{e*} = \left\langle \mathbb{T}^{t} f^{*}, e \right\rangle_{e} = \left\langle f^{*}, \mathbb{T} e \right\rangle_{f} = \left\langle \mathbb{J}_f \mathbb{T} e, f^{*} \right\rangle_{f*}$$

Доказательство утверждения (ii)-4.

Отсюда и из (11) получим равенство

$$\mathbb{T}^{tt}\mathbb{J}_e = \mathbb{J}_f\mathbb{T}.$$

В силу рефлексивности пространства $\mathbb{E}$ существует обратный оператор $\mathbb{J}_e^{-1}$ и поэтому получаем равнство

$$\mathbb{T}^{tt} = \mathbb{J}_f\mathbb{T}\mathbb{J}_e^{-1}.$$

Отсюда из инъективности $\mathbb{T}$ вытекает инъективность оператора $\mathbb{T}^{tt}$, а стало быть, получаем, что

$$\mathbb{T}^t(\mathbb{F}^*) \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*.$$

Теорема доказана.



Приложение для оператора топологического вложения.

Теперь достаточно применить общий результат теоремы к важному частному случаю оператора инъективного и непрерывного вложения

$$\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$$

и транспонированного оператора

$$\mathbb{J}_{ef}^{t} : \mathbb{F}^{*} \to \mathbb{E}^{*}.$$

Теорема

Пусть $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *— это два банаховых пространства и* $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$. *Тогда имеют место следующие утверждения*

(i) $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \Leftrightarrow \mathbb{J}_{ef}^{t}$ *— является инъективным;*

(ii) $\mathbb{F}^{*} \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^{*} \Rightarrow \mathbb{J}_{ef}$ *— является инъективным, причем имеет место обратное утверждение при условии, что* $\mathbb{E}$ *рефлексивно.*

Постановка важных вопросов.

Пусть у нас имеются два банаховых пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ такие, что их пересечение $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ и их сумма $\mathbb{E} + \mathbb{F}$ тоже банаховые пространства относительно некоторых норм.

Что можно сказать о соответствующих сопряженных пространствах $(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$ и $(\mathbb{E} + \mathbb{F})^*$?

Для ответа на эти вопросы начнем с аккуратного построения банаховых пространств $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ и $\mathbb{E} + \mathbb{F}$.

Пересечение банаховых пространств.

Лемма

Пусть банаховы пространства $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *непрерывно вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство* $\mathbb{V}$, *тогда множество* $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ *является банаховым относительно нормы*

$$\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}} \equiv \|u\|_e + \|u\|_f .$$

Доказательство-1.

Проверим, что (??) является нормой. Пусть

$$\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}} = 0.$$

Тогда $\|u\|_e = 0$ и $\|u\|_f = 0$. Отсюда приходим к выводу, что, с одной стороны, $u = \theta_e$ — нуль пространства $\mathbb{E}$, с другой стороны, $u = \theta_f$ — нуль пространства $\mathbb{F}$.

Но поскольку оба пространства вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство $\mathbb{V}$, то приходим к выводу, что $u = \theta_e = \theta_f = \theta \in \mathbb{V}$.

Доказательство-2.

Итак, пусть $\{u_n\} \subset \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ — фундаментальна по введенной норме, тогда, очевидно, она фундаментальна по каждой в отдельности норме пространств $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$. В силу полноты этих пространств приходим к выводу, что

$$u_n \to u_e \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{E}$$

и

$$u_n \to u_f \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{F}.$$

Но поскольку банаховы пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ непрерывно вложены в локально выпуклое пространство $\mathbb{V}$, то приходим к выводу, что последовательность $\{u_n\}$ сходится в $\mathbb{V}$ к пределу $u_0 = u_e = u_f$.

Сумма банаховых пространств.

Лемма

Пусть банаховы пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ непрерывно вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство $\mathbb{V}$. Тогда множество

$$\mathbb{E} + \mathbb{F} \equiv \left\{ u + v \middle| \, u \in \mathbb{E}, v \in \mathbb{F} \right\}$$

можно превратить в банахово пространство относительно нормы

$$\|w\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} \equiv \inf_{u\in\mathbb{E}, v\in\mathbb{F},\ u+v=w} \max\left(\|u\|_e, \|v\|_f\right).$$

Пояснить, что это не прямая сумма банаховых пространств.



Доказательство-1.

Пусть

$$\|w\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} = 0.$$

Тогда вытекает, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие элементы $u_n \in \mathbb{E}$ и $v_n \in \mathbb{F}$, что

$$w = u_n + v_n, \quad \|u_n\|_e < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \|v_n\|_f < \frac{1}{n}.$$

Отсюда приходим к выводу, что $u_n \to \theta_e$ сильно в $\mathbb{E}$, а $v_n \to \theta_f$ сильно в $\mathbb{F}$.

Но поскольку оба банаховых пространства вложены в одно и тоже локально выпуклое пространство, то $u_n + v_n \to \theta = \theta_e = \theta_f$ в $\mathbb{V}$. Значит, $w = \theta$.

Доказательство-2.

Докажем теперь полноту пространства $\mathbb{E}+\mathbb{F}$.

Пусть $\{w_n\} \subset \mathbb{E}+\mathbb{F}$ фундаментальная относительно введенной нормы.

Тогда из нее можно выделить такую подпоследовательность $\{w_{n_k}\} \subset \{w_n\}$, что

$$\|w_{n_k} - w_{n_{k-1}}\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} < 2^{-k} \quad \text{для} \quad k \in \mathbb{N},$$

По определению нормы найдутся такие последовательности $\{u_k\} \subset \mathbb{E}$ и $\{v_k\} \subset \mathbb{F}$, что

$$w_{n_k} - w_{n_{k-1}} = u_k + v_k, \quad \|u_k\|_e < 2^{1-k}, \quad \|v_k\|_f < 2^{1-k},$$

$$w_{n_0} = u_0 + v_0 \quad \text{для} \quad u_0 \in \mathbb{E}, \quad v_0 \in \mathbb{F}.$$

Доказательство-3.

По построению имеем

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \to u = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{E} \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \to v = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{F} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Действительно, имеют место оценки

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{n} u_k \right\|_e \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{1-k} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

и

$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} v_k \right\|_f \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{1-k} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство-4.

Положим

$$w = u + v,$$

тогда имеем

$$\|w - w_{n_k}\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} \leqslant \max\left(\|u - u_{n_k}\|_e, \|v - v_{n_k}\|_f\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теперь в силу неравенства треугольника имеем неравенство:

$$\|w - w_n\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} \leqslant \|w - w_{n_k}\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}} + \|w_{n_k} - w_n\|_{\mathbb{E}+\mathbb{F}}$$

откуда из фундаментальности $\{w_n\}$ и предыдущего неравенства получаем, что

$$w_n \to w \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{E} + \mathbb{F}$$

относительно введенной нормы.

Теорема доказана.



Декартово произведение банаховых пространств.

Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ банаховы пространства. Тогда их декартово произведение $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ можно сделать банаховым пространством относительно следующей нормы:

$$\|\{u, v\}\| \equiv \|u\|_e + \|v\|_f. \tag{12}$$

И здесь не нужно условия вложения банаховых пространств $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ в локально выпуклое пространство! Проверьте сами.

Сопряженное к пересечения банаховых пространств.

Теорема

Пусть банаховы пространства $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$ *непрерывно вложены в локально выпуклое пространство* $\mathbb{V}$. *Пусть банахово относительно введенной нормы пространство* $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ *плотно вложено в* $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{F}$. *Тогда имеем*

$$(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^* = \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*.$$

Причем равенство понимается в том смысле, что это одно и тоже банахово пространство.

Доказательство-1.

Сначала докажем, что

$$(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^* = \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*.$$

имеет место в смысле равенства множеств.

Итак, докажем, что $\mathbb{E}^* + \mathbb{F}^* \subset (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$.

Действительно, в силу условия теоремы банахово пространство $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ плотно как в $\mathbb{E}$ так и в $\mathbb{F}$. Поэтому из результата (i) доказанной уже теоремы приходим к выводу, что имеют место вложения

$$\mathbb{E}^* \subset (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^* \quad \text{и} \quad \mathbb{F}^* \subset (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*,$$

а значит,

$$\mathbb{E}^* + \mathbb{F}^* \subset (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*.$$



Доказательство-2.

Докажем теперь обратное включение:

$$(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^* \subset \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*.$$

Введем ряд обозначений. Рассмотрим скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ и $(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$

$$\langle f, u \rangle_{e \cap f} \quad \text{для всех} \quad f \in (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^* \quad \text{и} \quad u \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}. \tag{13}$$

Доказательство-3.

Заметим, что тогда сопряженное пространство $(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$ банахово относительно следующей нормы

$$\|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*} \equiv \sup_{\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}}=1} |\langle f, u\rangle_{e\cap f}| .$$

Теперь рассмотрим декартово произведение банаховых пространств $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ и сопряженное к нему $(\mathbb{E} \times \mathbb{F})^*$ относительно скобок двойственности

$$\langle \mathfrak{F}, \mathfrak{U}\rangle_{e\times f} \quad \text{для всех} \quad \mathfrak{F} \in (\mathbb{E} \times \mathbb{F})^* \quad \text{и} \quad \mathfrak{U} \in \mathbb{E} \times \mathbb{F}.$$

Рассмотрим следующее подпространство в декартовом произведении банаховых пространств $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$:

$$\mathbb{W} = \left(\{u, u\} \,\Big|\, u \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}\right).$$



Доказательство-4.

Для заданного $f \in (\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$ определим функционал $\mathcal{F}$ на $\mathbb{W}$ соотношением

$$\langle \mathcal{F}, \mathcal{U} \rangle_{e \times f} \equiv \langle f, u \rangle_{e \cap f} ,$$

где $u \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ и $\mathcal{U} = \{u, u\}$. Проверим, что так введенный функционал $\mathcal{F}$ на подпространстве $\mathbb{W}$ действительно является линейным и непрерывным. Проверим линейность. Справедлива цепочка равенств:

$$\langle \mathcal{F}, \alpha_1 \mathcal{U}_1 + \alpha_2 \mathcal{U}_2 \rangle_{e \times f} = \langle f, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \rangle_{e \cap f} =$$
$$= \alpha_1 \langle f, u_1 \rangle_{e \cap f} + \alpha_2 \langle f, u_2 \rangle_{e \cap f} =$$
$$= \alpha_1 \langle \mathcal{F}, \mathcal{U}_1 \rangle_{e \times f} + \alpha_2 \langle \mathcal{F}, \mathcal{U}_2 \rangle_{e \times f} \quad \forall \quad u_1, u_2 \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1.$$

Доказательство-5.

Теперь мы должны доказать непрерывность так введенного функционала $\mathcal{F}$. Действительно, пусть имеется последовательность элементов $\{\mathcal{U}_n\} \subset \mathbb{W}$ сильно сходящаяся в $\mathbb{W}$ к некоторому элементу $\mathcal{U} \in \mathbb{W}$. По определению $\mathbb{W}$ это означает, что

$$\|\{u_n, u_n\} - \{u, u\}\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

В свою очередь это означает, что $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ относительно нормы. Тогда имеет место предельное равенство:

$$\left|\langle \mathcal{F}, \mathcal{U}_n - \mathcal{U}\rangle_{e\times f}\right| = \left|\langle f, u_n - u\rangle_{e\cap f}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*} \|u_n - u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, непрерывность $\mathcal{F}$ доказана. Стало быть, $\mathcal{F} \in \mathbb{W}^*$.

Доказательство-6.

Причем имеет место цепочка равенств

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}^*} \equiv \sup_{\|\mathcal{U}\|_{\mathbb{W}}=1} \left|\langle \mathcal{F}, \mathcal{U}\rangle_{e\times f}\right| =$$
$$= \sup_{\|\mathcal{U}\|_{\mathbb{W}}=1} \left|\langle f, u\rangle_{e\cap f}\right| = \sup_{\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}}=1} \left|\langle f, u\rangle_{e\cap f}\right| \equiv \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}\,.$$

По теореме Хана–Банаха функционал $\mathcal{F}$ можно продолжить с подпространства $\mathbb{W} \subset \mathbb{E} \times \mathbb{F}$ на все банахово пространство $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$ с сохранением нормы. Для удобства продолженный функционал будем обозначать также через $\mathcal{F}$. Причем имеют место равенства

$$\|\mathcal{F}\|_{(\mathbb{E}\times\mathbb{F})^*} = \|\mathcal{F}\|_{\mathbb{W}^*} = \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}\,.$$



Доказательство-7.

Теперь введем функционалы $g \in \mathbb{E}^*$ и $h \in \mathbb{F}^*$ следующим образом

$$\langle g, u \rangle_e = \langle \mathfrak{F}, \{u, \theta_f\} \rangle_{e \times f}\,, \quad \langle h, v \rangle_f = \langle \mathfrak{F}, \{\theta_e, v\} \rangle_{e \times f} \ \forall\, u \in \mathbb{E}, v \in \mathbb{F}, \tag{14}$$

где θ_e — это нулевой элемент банахова пространства $\mathbb{E}$, а θ_f — нулевой элемент из $\mathbb{F}$.

Можно проверить, что так определенные функционалы g и h линейны и непрерывны. Заметим, что из определения функционалов g и h (14) вытекает цепочка соотношений:

$$\|g\|_{e*} \equiv \sup_{\|u\|_e=1} |\langle g, u \rangle_e| = \sup_{\|u\|_e=1} \left| \langle \mathfrak{F}, \{u, \theta_f\} \rangle_{e \times f} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\{u,v\}\|_{\mathbb{E}\times\mathbb{F}}=1} \left| \langle \mathfrak{F}, \{u, v\} \rangle_{e \times f} \right| \equiv \|\mathfrak{F}\|_{(\mathbb{E}\times\mathbb{F})^*} = \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}$$

Доказательство-8.

И аналогичные соотношения для $h \in \mathbb{F}^*$

$$\|h\|_{f*} \equiv \sup_{\|v\|_f=1} |\langle h, v\rangle_f| = \sup_{\|v\|_f=1} \left|\langle \mathcal{F}, \{\theta_e, v\}\rangle_{e\times f}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\{u,v\}\|_{\mathbb{E}\times\mathbb{F}}=1} \left|\langle \mathcal{F}, \{u, v\}\rangle_{e\times f}\right| \equiv \|\mathcal{F}\|_{(\mathbb{E}\times\mathbb{F})^*} = \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}.$$

Из этих двух цепочек неравенств получаем, что

$$\max\{\|g\|_{e*}, \|h\|_{f*}\} \leqslant \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}.$$

В силу определения функционалов $g \in \mathbb{E}^*$ и $h \in \mathbb{F}^*$ (13) получаем, что

$$\langle g, u\rangle_e + \langle h, u\rangle_f = \langle \mathcal{F}, \{u, \theta_f\}\rangle_{e\times f} + \langle \mathcal{F}, \{\theta_e, u\}\rangle_{e\times f} =$$

$$= \langle \mathcal{F}, \{u, u\}\rangle_{e\times f} = \langle f, u\rangle_{e\cap f} \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E}\cap\mathbb{F},$$

но отсюда сразу же получаем, что $f = g + h \in \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*$.

Доказательство-9.

Отсюда, в частности, вытекает неравенство

$$\|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*} \leqslant \max\{\|g\|_{e*}, \|h\|_{f*}\} \leqslant \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}. \qquad (15)$$

Ну и конечно, доказали включение

$$(\mathbb{E}\cap\mathbb{F})^* \subset \mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*.$$

Нам осталось доказать, что множества совпадают и как топологические пространства. Для этого нужно доказать, что

$$\|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*} = \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*}.$$



Доказательство-10.

В силу (15) осталось доказать, что

$$\|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*} \geqslant \|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*} . \tag{16}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств

$$\|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*} \equiv \sup_{\|u\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}}=1} \left|\langle f, u\rangle_{e\cap f}\right| = \sup_{\|u\|_e+\|u\|_f=1} \left|\langle f, u\rangle_{e\cap f}\right| =$$

$$= \sup_{\|u\|_e+\|u\|_f=1} |\langle g, u\rangle_e + \langle h, u\rangle_f| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|u\|_e+\|u\|_f=1} [\|g\|_{e*}\|u\|_e + \|h\|_{f*}\|u\|_f] \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\|g\|_{e*}, \|h\|_{f*}\} .$$

Доказательство-11.

Таким образом, получили неравенство

$$\|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*} \leqslant \max\left\{\|g\|_{e*}, \|h\|_{f*}\right\}.$$

Возьмем от обеих частей этого неравенства infimum по всевозможным $g \in \mathbb{E}^*$, $h \in \mathbb{F}^*$ и таким, что $f = g + h$. Тогда получим неравенство

$$\|f\|_{\mathbb{E}\cap\mathbb{F}*} \leqslant \inf_{g\in\mathbb{E}^*, h\in\mathbb{F}^*,\ f=g+h} \max\left\{\|g\|_{e*}, \|h\|_{f*}\right\} \equiv \|f\|_{\mathbb{E}^*+\mathbb{F}^*}.$$

Таким образом, (16) доказано. Из (15) вытекает равенство норм пространств $\mathbb{E}^* + \mathbb{F}^*$ и $(\mathbb{E} \cap \mathbb{F})^*$. Значит, в силу равенств их как множеств вытекает, что они одно и тоже банахово пространство.

Теорема доказана.



Сопряженное к сумме банаховых пространств.

Аналогичный результат справедлив и для $(\mathbb{E}+\mathbb{F})^*$. Именно, справедлива следующая теорема:

Теорема

Пусть банаховы пространства $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ непрерывно вложены в локально выпуклое пространство $\mathbb{V}$. Пусть банахово относительно введенной нормы пространство $\mathbb{E}\cap\mathbb{F}$ плотно вложено в $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$. Тогда имеем

$$(\mathbb{E}+\mathbb{F})^* = \mathbb{E}^* \cap \mathbb{F}^*.$$

Причем равенство понимается в том смысле, что это одно и тоже банахово пространство.

Оператор топологического вложения.

Пусть $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ два банаховых пространства и $\mathbb{E}$ рефлексивно, причем $\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F}$, т. е. существует такой линейный, инъективный и непрерывный оператор вложения

$$\mathbb{J}_{ef} : \mathbb{E} \to \mathbb{F},$$

причем $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E}$ плотно в $\mathbb{F}$.

Таким образом, каждому элементу $u \in \mathbb{E}$ сопоставляется некоторый элемент $v = \mathbb{J}_{ef}u$.

С другой стороны, для оператора $\mathbb{J}_{ef}$ определен транспонированный оператор

$$\mathbb{J}^t_{ef} : \mathbb{F}^* \to \mathbb{E}^*,$$

причем в силу теоремы 16 оператор $\mathbb{J}^t_{ef}$ является линейным, непрерывным, инъективным, причем $\mathbb{J}^t_{ef}\mathbb{F}^*$ плотно в $\mathbb{E}^*$.

Равенство скобок двойственности.

Таким образом, каждому элементу $f \in \mathbb{F}^*$ соответствует некоторый элемент $\mathbb{J}_{ef}^t f \in \mathbb{E}^*$.

По определению транспонированного оператора выполнено равенство:

$$\left\langle \mathbb{J}_{ef}^t f, u \right\rangle_e = \langle f, \mathbb{J}_{ef} u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \qquad (17)$$

Однако, если мы отождествим $\mathbb{E}$ с его образом в $\mathbb{F}$, т. е. с $\mathbb{J}_{ef}\mathbb{E}$, а $\mathbb{F}^*$ отождествим с его образом в $\mathbb{E}^*$, т. е. с $\mathbb{J}_{ef}^t \mathbb{F}^*$, тогда (17) можно переписать в более простом виде, как это всегда и делается:

$$\langle f, u \rangle_e = \langle f, u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*, \qquad (18)$$

причем имеют место плотные вложения

$$\mathbb{E} \overset{ds}{\subset} \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \mathbb{F}^* \overset{ds}{\subset} \mathbb{E}^*. \qquad (19)$$

Теорема о равенстве скобок двойственности.

Теорема

Пусть банахово пространство $\mathbb{E}$ *непрерывно и плотно вложено в банахово пространство* $\mathbb{F}$, *тогда имеет место равенство*

$$\langle f, u \rangle_e = \langle f, u \rangle_f \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{E} \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{F}^*. \tag{20}$$